- Definizione 7 (isomorfismo): due strutture algebriche (A, T) e $(B, *)$, dove A, B sono insiemi e (T) e $(*)$ rispettivamente le leggi di composizione interne, si dicono isomorfe quando esiste una corrispondenza biunivoca $f : A \to B$ tale che:

$$f(a\, T\, b) = f(a) * f(b) \quad , \ \forall a, b \in A .$$

- Esercizi vari: sia $\overrightarrow{OD_1} = 2\vec{i} - \vec{j} + 3\vec{k}$ e $RA(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$; le coordinate di $\overrightarrow{OD_1}$ rispetto $RA(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ sono:

$\begin{pmatrix} +2 \\ -1 \\ +3 \end{pmatrix}$ considerate nell'ordine $(\downarrow)$ così come scritto.

Sia ora da calcolare i seguenti prodotti scalari e somme vettoriali:

1) $\pi \cdot \overrightarrow{OD_1} \Rightarrow \pi \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \pi \cdot 2 \\ \pi \cdot (-1) \\ \pi \cdot 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\pi \\ -\pi \\ 3\pi \end{pmatrix} \Rightarrow \pi \overrightarrow{OD_1} =$

$= 2\pi \vec{i} - \pi \vec{j} + 3\pi \vec{k}$.

2) $\overrightarrow{OD_1} + \overrightarrow{OD_2}$ con $\overrightarrow{OD_2} = \vec{i} + \vec{j} - 2\vec{k}$;

$\overrightarrow{OD_1} + \overrightarrow{OD_2} \Rightarrow \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2+1 \\ -1+1 \\ 3-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow$

$\Rightarrow \overrightarrow{OD_1} + \overrightarrow{OD_2} = 3\vec{i} + 0\vec{j} + 1\vec{k} = 3\vec{i} + \vec{k}$

3) $2 \cdot \overrightarrow{OD_1} - 4\overrightarrow{OD_2}$:

$\Rightarrow 2 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} - 4 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -4 \\ -4 \\ +8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4-4 \\ -2-4 \\ 6+8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -6 \\ 14 \end{pmatrix} \Rightarrow$

$\Rightarrow 2 \cdot \overrightarrow{OD_1} + 4\overrightarrow{OD_2} = 0\vec{i} - 6\vec{j} + 14\vec{k} = -6\vec{j} + 14\vec{k}$.

- EQUAZIONI DI RETTE NEL PIANO E NELLO SPAZIO:

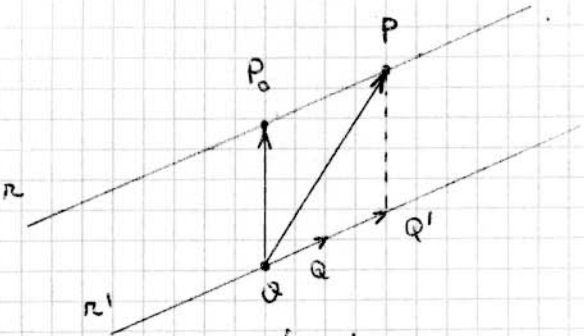
In V_0^2 è possibile fornire una procedura di calcolo per descrivere tutti i punti di una retta a partire da due di essi.

Fissato un sistema di riferimento affine $RA(O, \vec{i}, \vec{j})$ e sia r una generica retta; se la retta r passa per l'origine O, cioè $O \in r$ allora considerato un punto $Q \neq O$, $Q \in r \Rightarrow$ un punto P del piano, cioè $P \in A^2$, appartiene ad r $\Leftrightarrow \overrightarrow{OP} = t \cdot \overrightarrow{OQ}$ con $t \in R$. In sostanza $\forall P \in r, \exists t \in R : \overrightarrow{OP} = t \cdot \overrightarrow{OQ}$ cioè $\overrightarrow{OP}$ sia multiplo di $\overrightarrow{OQ}$ (fig. 9).

fig. 9.

Se la retta r è qualunque, cioè può essere $O \notin r$, presa una retta $r' \parallel r$ e passante per O, cioè $O \in r'$ e fissato un punto $P_0 \in r$ allora si ha che un punto $P \in r$, con $P \in A^2$, $\Longleftrightarrow$ il segmento $\overline{P_0P}$ è parallelo alla retta r' cioè $\Longleftrightarrow$ il vettore $(\overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OP_0}) \in r'$. A tal scopo si fissi un punto $Q \in r'$ quanto detto si può riassumere dicendo che $P \in r \Longleftrightarrow \overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OP_0} = \overrightarrow{OQ'} = t \cdot \overrightarrow{OQ}$ con $t \in \mathbb{R}$; quindi si può scrivere (fig. 10):

$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OP_0} + t \cdot \overrightarrow{OQ}$$ e si definisce equazione vettoriale di una retta.



$\overrightarrow{OQ}$ viene definito vettore direttore della retta r.

fig. 10

É inoltre immediato scrivere l'equazione vettoriale della retta r passante per due punti P_1 e P_2 infatti (fig. 11) si ha che il vettore direttore $\overrightarrow{OQ}$ è definito da $\overrightarrow{OQ} = \overrightarrow{OP_2} - \overrightarrow{OP_1}$ quindi un generico punto $P \in r \Longleftrightarrow \overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OP_1} + t \cdot \overrightarrow{OQ} =$
$= \overrightarrow{OP_1} + t \cdot (\overrightarrow{OP_2} - \overrightarrow{OP_1})$.

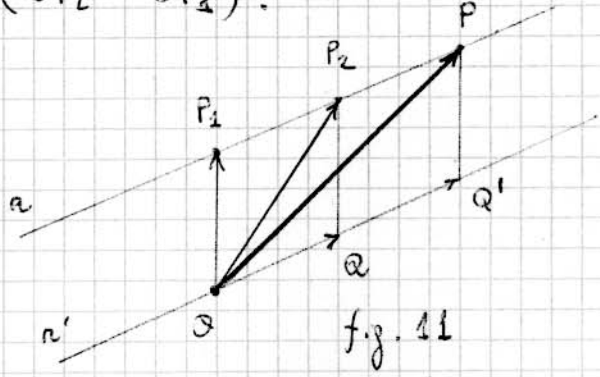


fig. 11

- <u>Intersezione di due rette:</u> sia r una retta passante per P_0 con vettore direttore $\overrightarrow{OQ}$ ed r' una retta passante per P_0' con vettore direttore $\overrightarrow{OQ'}$; le equazioni vettoriali delle rette r e r' considerate sono rispettivamente:

$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OP_0} + t \cdot \overrightarrow{OQ} \quad (\text{retta } r) \qquad \text{con } P \in r \text{ e } t \in \mathbb{R}$$

$$\overrightarrow{OP'} = \overrightarrow{OP_0'} + t' \cdot \overrightarrow{OQ'} \quad (\text{retta } r') \qquad \text{con } P' \in r' \text{ e } t' \in \mathbb{R}$$

Queste due rette si intersecano in un punto $\mathbf{X}$ e quindi individuano il vettore $\overrightarrow{OX}$ $\Longleftrightarrow \exists\, t, t' \in \mathbb{R}$ tali che $\overrightarrow{OP_0} + t \cdot \overrightarrow{OQ} = \overrightarrow{OP_0'} + t' \cdot \overrightarrow{OQ'}$ quindi

$$OP_0 - OP_0' = t\cdot OQ' - t\, OQ.$$

In altri termini si è dimostrato che $r \cap r' \iff (\vec{OP_0} - \vec{OP_0'})$ appartiene al piano di vettori generato dai vettori direttori $\vec{OQ}$ ed $\vec{OQ'}$.

Tutti i ragionamenti finora fatti sono validi anche per vettori nello spazio cioè in V_0^3.

- Equazioni parametriche di una retta: ricordando la corrispondenza $V_0^2 \leftrightarrow \mathbb{R}^2$, fissando un sistema di riferimento affine $RA(O, \vec{i}, \vec{j})$ e i vettori $\vec{OP_0}$, $\vec{OQ}$ ed $\vec{OP}$ indicando con $\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$ le coordinate del punto P_0, $\begin{pmatrix} l \\ m \end{pmatrix}$ le coordinate di Q ed infine $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ le generiche coordinate di P ricordando l'equazione vettoriale della retta r si ha che:

$$\vec{OP} = \vec{OP_0} + t\cdot \vec{OQ}$$

ma applicando la funzione $F_B : V_0^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ dove $B = \{\vec{i}, \vec{j}\}$ è la base di V_0^2 si ottiene: $F_B(\vec{OP}) = F_B(\vec{OP_0} + t\cdot \vec{OQ})$ quindi

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} + t\cdot \begin{pmatrix} l \\ m \end{pmatrix} \Rightarrow \text{si ottiene il sistema } \begin{cases} x = x_0 + t\cdot l \\ y = y_0 + t\cdot m \end{cases}$$

di equazioni parametriche di una retta del piano, con $t \in \mathbb{R}$.

Nello spazio, cioè in V_0^3 (o meglio A^3), dato il sistema $RA(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$

posto: $\vec{OQ} = l\cdot\vec{i} + m\vec{j} + n\,\vec{k}$ con $l, m, n \in \mathbb{R}$ coordinate di Q;
$\vec{OP_0} = x_0\,\vec{i} + y_0\,\vec{j} + z_0\,\vec{k}$ con $x_0, y_0, z_0 \in \mathbb{R}$ coordinate di P_0;
$\vec{OP} = x\,\vec{i} + y\,\vec{j} + z\,\vec{k}$ con $x, y, z \in \mathbb{R}$ coordinate del generico punto P;

ricordando ancora una volta l'eq. vettoriale $\vec{OP} = \vec{OP_0} + t\cdot \vec{OQ}$ e applicando F_B si ha:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} + t\cdot \begin{pmatrix} l \\ m \\ n \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x = x_0 + t\cdot l \\ y = y_0 + t\cdot m \\ z = z_0 + t\cdot n \end{cases}$$

cioè si ottiene un sistema di equazioni parametriche di una retta nello spazio con $t \in \mathbb{R}$.

Il generico punto $P \in r \iff$ le sue coordinate risolvono il sistema e quindi si riesce a trovare un valore univoco del parametro t.

A questo punto è possibile determinare o meglio risolvere il problema dell'intersezione di due rette r ed r'. Il ragionamento che si svolgerà è nel piano ma può essere adottato anche nello spazio. Fissato un sistema $RA(O, \vec{i}, \vec{j})$, considerate due rette r ed r' la prima passante per $P_0 \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$, la seconda per $P_0' \begin{pmatrix} x_0' \\ y_0' \end{pmatrix}$ dati i rispettivi vettori direttori $\vec{OQ}$, $\vec{OQ'}$ con $Q\begin{pmatrix} l \\ m \end{pmatrix}$, $Q'\begin{pmatrix} l' \\ m' \end{pmatrix}$ le rette si intersecano

$\Longleftrightarrow \quad \overrightarrow{OP_0} - \overrightarrow{OP_0'} = t' \cdot \overrightarrow{OQ'} - t \cdot \overrightarrow{OQ}$ cioè $\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x_0' \\ y_0' \end{pmatrix} = t' \cdot \begin{pmatrix} l' \\ m' \end{pmatrix} - t \cdot \begin{pmatrix} l \\ m \end{pmatrix}$

quindi $\begin{cases} x_0 - x_0' = t' l' - t \cdot l \\ y_0 - y_0' = t' \cdot m' - t \cdot m \end{cases}$ il sistema ammette soluzioni nelle incognite t e t' (parametri).

Se $\exists \; t_0$ e $t_0' \in \mathbb{R}$ soluzioni del sistema lineare allora il punto di intersezione X ha coordinate:

$$\begin{pmatrix} x_0 + l t_0 \\ y_0 + m t_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0' + l' \cdot t_0' \\ y_0' + m' \cdot t_0' \end{pmatrix}$$

infatti il punto X è determinato ricordando che $\overrightarrow{OX} = \overrightarrow{OP_0} + t \cdot \overrightarrow{OQ} = \overrightarrow{OP_0'} + t' \overrightarrow{OQ'}$.

- Osservazioni:

1) le equazioni parametriche introdotte non sono vere e proprie equazioni da risolvere ma sono funzioni di un parametro $t \in \mathbb{R}$; per cui si può scrivere l'applicazione $(x, y)(t) : \mathbb{R} \to r$ e $t \longmapsto P(t) \in r$ dove r è la retta e P un punto appartenente ad essa.

2) le equazioni parametriche della retta e come si vedrà del piano non sono univocamente determinate.

3) il problema di passare da A^2 (o A^3) a $\mathbb{R}^2$ (o $\mathbb{R}^3$) tramite la scelta di un sistema di riferimento affine si trasforma da geometrico ad analitico, cioè nella risoluzione di sistemi di equazioni lineari.

- Esercizi svolti:

1) • Quesito 1: supposto $P_0 \in r$, $\overrightarrow{OQ} \parallel r$ (vettore direttore) con $P_0 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ e $\overrightarrow{OQ} = \vec{i} - \vec{j} + 2\vec{k}$ determinare le eq. parametriche della retta r.

$$\begin{cases} x = x_0 + t \cdot l \\ y = y_0 + t \cdot m \\ z = z_0 + t \cdot n \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 + t \cdot 1 \\ y = 0 + t \cdot (-1) \\ z = -1 + t \cdot (2) \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x = 1 + t \\ y = -t \\ z = -1 + 2t \end{cases}$$

$\forall t \in \mathbb{R}, \exists! P \in r$; $P \in r \Longleftrightarrow \exists t \in \mathbb{R}$ tale che sia verificato il sistema appena ricavato.

• Quesito 2: stabilire se i punti $A \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ e $B \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/2 \\ -2 \end{pmatrix} \in r$ oppure $\notin r$.

$A \in r \Longleftrightarrow \exists t \in \mathbb{R}: \begin{cases} 1 = 1 + t \\ 1 = -t \\ 1 = -1 + 2t \end{cases}$ avendo sostituito ad x, y, z le coordinate del punto A.

$\Longleftrightarrow \begin{cases} t = 0 \\ t = -1 \\ t = 1 \end{cases}$ il sistema non ha soluzioni quindi $A \notin r$

$B \in r \iff \exists t \in \mathbb{R} : \begin{cases} 1/2 = 1+t \\ 1/2 = -t \\ -2 = -1+2t \end{cases} \iff \begin{cases} t = -1/2 \\ t = -1/2 \\ t = -1/2 \end{cases}$ il sistema ammette soluzione

$t = -1/2$ quindi $B \in r$.

2) Determinare le equazioni parametriche della retta r passante per i punti $P_1 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ e $P_2 \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$. Posto $\vec{OQ} = \vec{OP_2} - \vec{OP_1}$ risulta evidente che $\vec{OQ}$ essendo vettore direttore di r si ha $\vec{OQ} \parallel r$ per cui $F_B(\vec{OQ}) = F_B(\vec{OP_2} - \vec{OP_1})$

cioè $\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$ quindi $\vec{OQ} = -2\vec{j} + 2\vec{k}$

ricordando ora che $\vec{OP} = \vec{OP_1} + t \cdot \vec{OQ}$ oppure $\vec{OP} = \vec{OP_2} + t \cdot \vec{OQ}$

scegliendo per semplicità di calcolo $\vec{OP_1}$ risulta $F_B(\vec{OP}) = F_B(\vec{OP_1} + t \cdot \vec{OQ})$

cioè $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y = 1 - 2t \\ z = 2t \end{cases}$

* scegliendo $\vec{OP_2}$ si ottiene invece

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y = -1 - 2t \\ z = 2 + 2t \end{cases}$$

* <u>Osservazione:</u> come vettore direttore si poteva considerare anche $\vec{OQ'} = \frac{1}{2}\vec{OQ}$

cioè $\vec{OQ'} = -\vec{j} + \vec{k}$ per cui le equazioni parametriche di r diventano:

$$\Rightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y = -1 + t' \\ z = 2 - t' \end{cases} ???$$

3) Sia $r_1 := \begin{cases} x = -1 \\ y = 1 - 2t \\ z = 2t \end{cases}$ ed $r_2 := \begin{cases} x = -1 \\ y = -1 + t' \\ z = 2 - t' \end{cases}$ dimostrare che le due rette sono coincidenti, cioè $r_1 = r_2$.

Per affermare che $r_1 = r_2$ occorre imporre il passaggio per due stessi punti nello spazio infatti si deve ricordare che per due punti nello spazio passa una ed una sola retta.

Per ricavare i due punti P_1 e P_2 basta porre $t = 0$ e $t = 1$ nelle eq. parametriche della retta r_1 quindi si ottengono

$$P_1 \begin{pmatrix} x = -1 \\ y = 1 \\ z = 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad e \quad P_2 \begin{pmatrix} x = -1 \\ y = -1 \\ z = 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

si può notare in modo immediato che P_2 si può ottenere dalle eq. parametriche di r_2 ponendo $t' = 0$ infatti:
$$r_2 : P_2 = \begin{cases} x = -1 \\ y = -1+0 \\ z = 2-0 \end{cases} \Rightarrow P_2 \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Per verificare invece che $P_1 \in r_2$ occorre sostituire le coordinate note dello stesso nelle equazioni parametriche di r_2 e verificare se $\exists\, t' \in \mathbb{R}$ che risolve il sistema lineare cioè che verifica il sistema; per cui:

$$r_2 : \begin{cases} -1 = -1 & \Rightarrow \text{identità} \\ 1 = -1+t' & \Rightarrow t' = 2 \\ 0 = 2-t' & \Rightarrow t' = 2 \end{cases}$$ risulta verificata quindi anche $P_2 \in r_2$

$\Rightarrow\ r_1 \,//\, r_2$.

4) Siano r ed r' due rette così definite: r sia passante per i punti $P_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ e $P_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ mentre r' sia passante per $P_1' \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ e $P_2' \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$; avendo fissato il sistema $RA(O, \vec{i}, \vec{j})$ determinare, se esiste, il punto X di intersezione delle due rette cioè $X \in r \cap r'$.

Le equazioni vettoriali delle due rette sono rispettivamente:

$r: \ \overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OP}_1 + t \cdot \overrightarrow{OQ}$ con $\overrightarrow{OQ} \,//\, r$ (vettore direttore di r);
$r': \ \overrightarrow{OP'} = \overrightarrow{OP'_1} + t' \cdot \overrightarrow{OQ'}$ con $\overrightarrow{OQ'} \,//\, r'$ (vettore direttore di r');

$$\overrightarrow{OQ} = \overrightarrow{OP_1} - \overrightarrow{OP_2} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \overrightarrow{OQ} = 2\vec{i} - \vec{j}$$

$$\overrightarrow{OQ'} = \overrightarrow{OP'_1} - \overrightarrow{OP'_2} \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \overrightarrow{OQ'} = -\vec{i} + \vec{j}$$

- Osservazione: nel calcolo di $\overrightarrow{OQ}$ ed $\overrightarrow{OQ'}$ è indifferente l'ordine dei vettori su cui eseguire la differenza e di conseguenza è indifferente l'ordine dei punti sui quali si esegue la differenza in quanto $\overrightarrow{OP_1} - \overrightarrow{OP_2} = -(\overrightarrow{OP_2} - \overrightarrow{OP_1})$ sono vettori opposti ma comunque paralleli ad r.

Le equazioni parametriche delle due rette sono allora:

$$r: \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 0 + (-t) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -t \end{cases}$$

$$r': \begin{cases} x = 0 + (-t') \\ y = 2 + t' \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -t' \\ y = 2 + t' \end{cases}$$

Ora si ha che $X = r \cap r' \iff X \in r$ e $X \in r'$ cioè se e solo se $\exists\, t, t' \in \mathbb{R}$ tali che le equazioni di entrambi i sistemi siano soddisfatte quindi si può scrivere:

$$X \in r \cap r' \iff \exists\, t, t' \in \mathbb{R} : \begin{cases} 1+2t = -t' \\ -t = 2+t' \end{cases} \iff \begin{cases} 1+2t = -t' \\ t = -2-t' \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} t = -2-t' \\ 1+2\cdot(-2-t') = -t' \end{cases} \quad (\text{per sostituzione}) \quad \text{quindi} \quad \begin{cases} t = -2-t' \\ 1-4-2t' = -t' \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} t = -2-t' \\ -3 = t' \end{cases} \iff \begin{cases} t = -2-(-3) = 1 \\ t' = -3 \end{cases}$$

* il sistema risolto è di due equazioni lineari (cioè di 1° grado) in due incognite, t e t'.

il punto X si può determinare analiticamente sostituendo i valori di t e t' nelle eq. parametriche delle due rette r ed r' cioè:

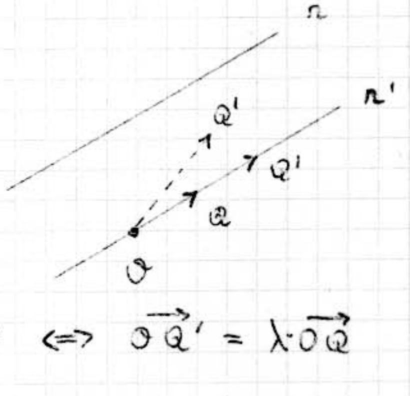
$$X : \begin{cases} x = 1 + 2\cdot(1) \\ y = -(1) \end{cases} \quad (\text{per } t = 1) \iff X : \begin{cases} x = 3 \\ y = -1 \end{cases} \iff X \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$X : \begin{cases} x = -(-3) \\ y = 2 + (-3) \end{cases} \quad (\text{per } t' = -3) \iff X : \begin{cases} x = 3 \\ y = -1 \end{cases} \iff X \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$$

quindi $X \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} \in r \cap r'$.

- <u>Condizione di parallelismo tra due rette:</u> date due rette r ed r' e i rispettivi vettori direttori $\overrightarrow{OQ}$ ed $\overrightarrow{OQ'}$ essendo $r \parallel \overrightarrow{OQ}$ e $r' \parallel \overrightarrow{OQ'}$

$$r \parallel r' \iff \overrightarrow{OQ} \parallel \overrightarrow{OQ'} \iff Q' \in r' \iff \overrightarrow{OQ'} = \lambda \cdot \overrightarrow{OQ} \text{ con } \lambda \in \mathbb{R}.$$



in definitiva $r \parallel r' \iff \overrightarrow{OQ'} = \lambda \cdot \overrightarrow{OQ}$ con $\lambda \in \mathbb{R}$ (cioè i vettori direttori sono fra loro proporzionali).

- <u>Esempio:</u> sono date due rette r ed r' con $r \parallel \overrightarrow{OQ} = 2\vec{i} - \vec{j}$ ed $r' \parallel \overrightarrow{OQ'} = -\vec{i} + \vec{j}$ dire se $r \parallel r'$.

$$r \parallel r' \iff \exists\, \lambda \in \mathbb{R} : \overrightarrow{OQ} = \lambda\, \overrightarrow{OQ'} \quad \text{cioè} \quad 2\vec{i} - \vec{j} = \lambda \cdot (-\vec{i} + \vec{j})$$

$$\iff \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \lambda \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ +1 \end{pmatrix} \iff \begin{cases} 2 = -\lambda \\ -1 = \lambda \end{cases} \iff \begin{cases} \lambda = -2 \\ \lambda = -1 \end{cases} \text{ che è impossibile}$$

per cui $r \not\parallel r'$ ($\not\parallel$ condizione di non parallelismo).

- Definizione 1 (rette sghembe): due rette si dicono sghembe quando non appartengono ad uno stesso piano e non sono incidenti.
- Definizione 2 (rette complanari): due rette si dicono complanari quando giacciono nello stesso piano.
- Esercizio di riepilogo: determinare le eq. parametriche della retta r passante per i punti $P_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ e $P_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, fissato il sistema $RA(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$; si determini inoltre, se esiste, il punto di intersezione X tra la retta r e la retta r' passante per i punti $P_1' \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$ e $P_2' \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$. Determinare infine l'eq. parametrica della retta $r'' \parallel r$ passante per l'origine O e trovare, se esistono, i valori di $a \in \mathbb{R}$ tali che il punto $P_a \begin{pmatrix} 2-a \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} \in r'$.

• Passo 1:

$$r: \ \overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OP_1} + t \cdot (\overrightarrow{OP_1} - \overrightarrow{OP_2}) \Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + t \cdot \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right]$$

$$\text{cioè} \quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -t \\ z = -1 - 2t \end{cases}$$

$$r': \ \overrightarrow{OP'} = \overrightarrow{OP_1'} + t \cdot (\overrightarrow{OP_1'} - \overrightarrow{OP_2'}) \Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} + t' \cdot \left[\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \right]$$

$$\text{cioè} \quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} + t' \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 + 0t' \\ y = -1 + 0t' \\ z = -1 - 3t' \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = -1 \\ z = -1 - 3t' \end{cases}$$

l'eq. parametrica di r' può essere semplificata infatti il vettore direttore di r' cioè $(\overrightarrow{OP_1'} - \overrightarrow{OP_2'}) = 0\vec{i} + 0\vec{j} + (-3)\vec{k} = -3\vec{k}$ ricordando che $r' \parallel (\overrightarrow{OP_1'} - \overrightarrow{OP_2'}) \Rightarrow r' \parallel -3\vec{k}$ e a tutti i suoi multipli quindi se $r' \parallel (-3\vec{k}) \Rightarrow r' \parallel +\vec{k}$ e quindi l'eq. parametrica può essere scritta:

$$r': \begin{cases} x = 1 \\ y = -1 \\ z = -1 + t' \end{cases}$$

• Passo 2: $X \in r \cap r' \iff \exists\, t, t' \in \mathbb{R}$ tale che i due sistemi siano verificati cioè

$$X \in r \cap r' \iff \exists\, t, t' \in \mathbb{R} : \begin{cases} 1 + 2t = 1 \\ -t = -1 \\ -1 - 2t = -1 + t' \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} t = 0 \\ t = 1 \\ -1 - 2t = -1 + t' \end{cases} \quad \text{impossibile!} \Rightarrow \quad r \cap r' = \emptyset \ \text{(insieme vuoto)}.$$

a questo punto è opportuno chiedersi se $r \parallel r'$ oppure se le rette sono sghembe. Allora

$$r \parallel r' \iff (\vec{OP_1} - \vec{OP_2}) \parallel (\vec{OP_1'} - \vec{OP_2'}) \iff (\vec{OP_1} - \vec{OP_2}) = \lambda \cdot (\vec{OP_1'} - \vec{OP_2'})$$

con $\lambda \in \mathbb{R}$; si può quindi scrivere:

$$r \parallel r' \iff \exists \lambda \in \mathbb{R} : 2\vec{i} - \vec{j} - 2\vec{k} = \lambda \cdot (-3\vec{k})$$

cioè
$$\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} = \lambda \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} \iff \begin{cases} 2 = \lambda \cdot 0 & \to \text{impossibile} \\ -1 = \lambda \cdot 0 & \to \text{impossibile} \\ -2 = -3\lambda & \to \lambda = 2/3 \end{cases} \Rightarrow \text{impossibile}$$

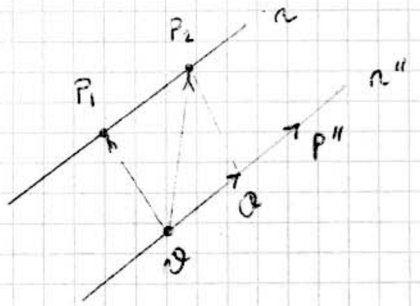
$\nexists \lambda \in \mathbb{R}$: il sistema sia risolubile per cui $r \nparallel r'$ quindi r ed r' sono sghembe.

• <u>Passo 3:</u> ricordando che $r \parallel (\vec{OP_1} - \vec{OP_2}) = 2\vec{i} - \vec{j} - 2\vec{k} = \vec{OQ}$

l'eq. vettoriale della retta $r'' \parallel r$ sarà: $\vec{OP''} = \vec{OP_0} + t'' \cdot (\vec{OQ})$

$$\vec{OP_0} = \vec{OO} = 0 \Rightarrow \vec{OP''} = t'' \cdot \vec{OQ} \Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = t'' \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 2t'' \\ y = -t'' \\ z = -2t'' \end{cases} \quad \text{posto } t'' = t \Rightarrow \begin{cases} x = 2t \\ y = -t \\ z = -2t. \end{cases}$$



• <u>Passo 4:</u> $P_a \in r' \iff \exists a, t' : \begin{cases} 2 - a = 1 \\ -1 = -1 \\ 3 = -1 + t' \end{cases} \iff \begin{cases} a = 1 \\ -1 = -1 \\ t' = 4 \end{cases}$

le soluzioni sono $a = 1$ e $t' = 4$ quindi $P_a \in r' \iff a = 1$.

Calcolare P_a per $a = 1$ cioè P_1:

$$P_1 : \begin{pmatrix} 2-a \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}_{a=1} = \begin{pmatrix} 2-1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

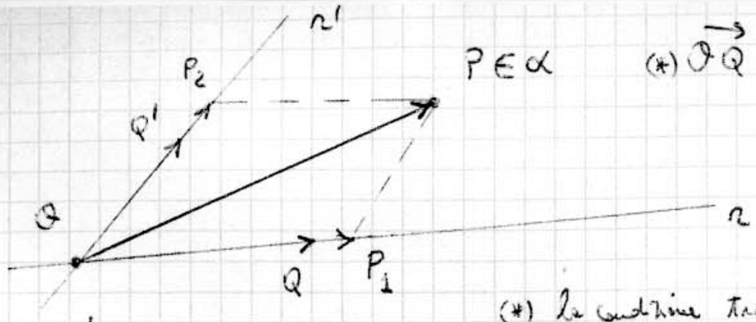
• <u>EQUAZIONI DI UN PIANO NELLO SPAZIO (A^3):</u>

Con procedimenti analoghi a quelli delle rette si dimostrerà o meglio si ricaveranno le equazioni vettoriali e parametriche di un generico piano nello spazio V_0^3.

- <u>Equazioni del piano passante per l'origine O:</u>

Supponiamo dapprima che un generico piano α passi per l'origine O; fissati i vettori direttori di α tali che $\vec{OQ}$ non sia proporzionale ad $\vec{OQ'}$ (fig. 12) allora un generico punto $P \in \alpha \iff \exists t, s$ tali che $\vec{OP} = t \cdot \vec{OQ} + s \cdot \vec{OQ'}$ (combinazione lineare dei due vettori direttori).

* Se $\vec{OQ} = \lambda \cdot \vec{OQ'}$ per qualche $\lambda \in \mathbb{R}$ il piano α degenera in una retta.



$P \in \alpha \qquad (*)\ \vec{OQ} \nparallel \vec{OQ'}$

fig. 12

(*) la condizione traduce il fatto seguente: per tre punti non allineati passa uno e un solo piano.

$$\vec{OP} = \vec{OP_1} + \vec{OP_2} = (t \cdot \vec{OQ}) + (s \cdot \vec{OQ'}) = t\,\vec{OQ} + s\,\vec{OQ'}, \quad t, s \in \mathbb{R}.$$

- <u>Equazioni di un piano non passante per l'origine O:</u>

Ora supponiamo invece che un generico piano α non passi per l'origine O; a tal scopo sia β un piano passante per O tale che $\beta \parallel \alpha$; fissato un punto $P_0 \in \alpha$ e ricordando che:

$\beta: \ t \cdot \vec{OQ} + s \cdot \vec{OQ'}$ dove $\vec{OQ}$ ed $\vec{OQ'}$ sono i vettori direttori di β (fig. 13)

$$P \in \alpha \iff (\vec{OP} - \vec{OP_0}) \in \beta \iff \exists\, t, s \in \mathbb{R} : \vec{OP} = \vec{OP_0} + t \cdot \vec{OQ} + s \cdot \vec{OQ'}$$

e quest'ultima si chiama eq. vettoriale del piano α.

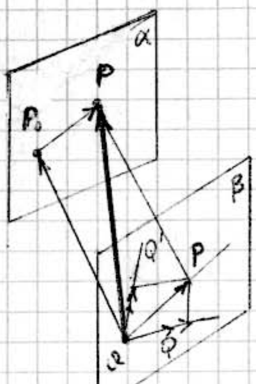


fig. 13

$$\vec{OP} - \vec{OP_0} = \vec{OA}$$

$$\vec{OA} \in \beta \iff \vec{OA} = t \cdot \vec{OQ} + s \cdot \vec{OQ'}$$

per qualche $t, s \in \mathbb{R}$ quindi si può scrivere

$$\vec{OP} - \vec{OP_0} = t \cdot \vec{OQ} + s \cdot \vec{OQ'}$$

$$\Longrightarrow \quad \vec{OP} = \vec{OP_0} + t \cdot \vec{OQ} + s \cdot \vec{OQ'}$$

Fissato un sistema di riferimento affine $RA(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ sia $P_0 \in \alpha$ e sia $\beta \parallel \alpha$ passante per O; $P \in \alpha$ se e solo se:

$$\vec{OP} = \vec{OP_0} + t \cdot \vec{i} + s \cdot \vec{j} \quad \text{se invece } \mathcal{B} = \{\vec{OQ}, \vec{OQ'}\}$$

$$\Rightarrow \quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} l \\ m \\ n \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} l' \\ m' \\ n' \end{pmatrix}$$

cioè
$$\begin{cases} x = x_0 + t \cdot l + s \cdot l' \\ y = y_0 + t \cdot m + s \cdot m' \\ z = z_0 + t \cdot n + s \cdot n' \end{cases}$$
che sono le eq. parametriche del piano con $t, s \in \mathbb{R}$.

dove $\begin{pmatrix} l \\ m \\ n \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} l' \\ m' \\ n' \end{pmatrix}$ sono le coordinate di Q e Q'.

- Esempi svolti: sia α un piano passante per il punto $P_0\begin{pmatrix}-1\\0\end{pmatrix}$ ed inoltre sia $\alpha \parallel \overrightarrow{OQ} = \vec{i} + \vec{j} - \vec{k}$, $\alpha \parallel \overrightarrow{OQ'} = 2\vec{j} + \vec{k}$; determinare le sue eq. parametriche.

$$\alpha: \overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OP_0} + t\cdot\overrightarrow{OQ} + s\cdot\overrightarrow{OQ'} \iff \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x_0\\y_0\\z_0\end{pmatrix} + t\cdot\begin{pmatrix}l\\m\\n\end{pmatrix} + s\cdot\begin{pmatrix}l'\\m'\\n'\end{pmatrix}.$$

quindi sostituendo le relative coordinate si ottiene:

$$\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix} + t\cdot\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix} + s\cdot\begin{pmatrix}0\\2\\1\end{pmatrix} \iff \begin{cases} x = 1+t \\ y = -1+t+2s \\ z = -t+s \end{cases}$$

A questo punto stabilire se $A\begin{pmatrix}2\\-2\\1\end{pmatrix} \in \alpha$; $A \in \alpha \iff \exists\, t, s \in \mathbb{R}$ che soddisfano il sistema di eq. parametriche di α, cioè se:

$$\exists\, t, s: \begin{cases} 2 = 1+t \\ -2 = -1+t+2s \\ 1 = -t+s \end{cases} \iff \begin{cases} t = 1 \\ -2 = -\cancel{1}+1+2s \\ 1 = -1+s \end{cases} \iff \begin{cases} t = 1 \\ s = -1 \\ s = 2 \end{cases} \text{ impossibile}$$

quindi $A \notin \alpha$. Verificare invece che $B\begin{pmatrix}2\\-2\\-2\end{pmatrix} \in \alpha$:

$$B \in \alpha \iff \exists\, t, s: \begin{cases} 2 = 1+t \\ -2 = -1+t+2s \\ -2 = -t+s \end{cases} \iff \begin{cases} t = 1 \\ s = -1 \\ s = -1 \end{cases} \text{ il sistema è risolto}$$

quindi $B \in \alpha$.

- Esercizio di riepilogo: dati 3 punti $P_1\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}$, $P_2\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$ e $P_3\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}$ determinare l'eq. parametrica del piano α passante; verificare prima di tutto che i tre punti non siano allineati (se così fossero i piani definiti sarebbero infiniti in quanto la retta passante per P_1, P_2 e P_3 è individuata dall'intersezione di più piani). Infine sia $P_a\begin{pmatrix}2-a\\-1\\3\end{pmatrix}$ determinare, se esiste, un $a \in \mathbb{R}: P_a \in \alpha$.

- Passo 1: per stabilire se i tre punti dati P_1, P_2 e P_3 non sono allineati si può procedere nel modo seguente:

i) dato il vettore $\overrightarrow{OQ} = (\overrightarrow{OP_1} - \overrightarrow{OP_2}) \parallel \alpha$ si ha che $\overrightarrow{OQ} = \vec{i} - 2\vec{j} - \vec{k}$
dato il vettore $\overrightarrow{OQ'} = (\overrightarrow{OP_1} - \overrightarrow{OP_3}) \parallel \alpha$ si ha che $\overrightarrow{OQ'} = -2\vec{j} + \vec{k}$

ii) P_1, P_2 e P_3 non sono allineati $\iff \overrightarrow{OQ} \nparallel \overrightarrow{OQ'} \iff \overrightarrow{OQ}$ non è proporzionale a $\overrightarrow{OQ'}$ per cui:

$$\overrightarrow{OQ} = \lambda\cdot\overrightarrow{OQ'} \iff \begin{pmatrix}1\\-2\\-1\end{pmatrix} = \lambda\cdot\begin{pmatrix}0\\-2\\1\end{pmatrix} \iff \begin{cases} 1 = \lambda\cdot 0 \\ -2 = -2\lambda \\ -1 = \lambda\cdot 1 \end{cases} \text{ che è impossibile}$$

per cui $\overrightarrow{OQ}$ non è proporzionale ad $\overrightarrow{OQ'} \Rightarrow P_1$, P_2 e P_3 non sono allineati.

Un'altro metodo equivalente è il seguente:

i) fissata l'eq. parametrica della retta r' passante per P_1 e P_2 deve essere $P_3 \notin r'$:

$$r': \overrightarrow{OP'} = \overrightarrow{OP_1} + t' \cdot (\overrightarrow{OP_1} - \overrightarrow{OP_2}) \iff r': \begin{cases} x = 1 + t \\ y = -1 - 2t \\ z = 0 - t \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x = 1+t \\ y = -1-2t \\ z = -t \end{cases}$$

ii) $P_3 \in r' \iff \exists\, t \in \mathbb{R}: \begin{cases} 1 = 1+t \\ 1 = -1-2t \\ -1 = -t \end{cases} \iff \begin{cases} t = 0 \\ t = -1 \\ t = 1 \end{cases}$ impossibile per cui $P_3 \notin r'$

$\Rightarrow P_1, P_2$ e P_3 non sono allineati.

- Passo 2: l'eq. vettoriale del piano è, rispetto P_1:

$\alpha: \overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OP_1} + t \cdot \overrightarrow{OQ} + s \cdot \overrightarrow{OQ'}$ per cui in termini di coordinate si ha:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \iff \begin{cases} x = 1 + t \\ y = -1 - 2t - 2s \\ z = -t + s \end{cases}$$

controverifica dei risultati

$$P_1 \in \alpha \iff \exists\, t, s \in \mathbb{R}: \begin{cases} 1 = 1+t \\ -1 = -1-2t-2s \\ 0 = -t+s \end{cases} \iff \begin{cases} t = 0 \\ -1 = -1-2s \\ s = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} t = 0 \\ s = 0 \\ s = 0 \end{cases} \text{ ok!}$$

$$P_2 \in \alpha \iff \exists\, t, s \in \mathbb{R}: \begin{cases} 0 = 1+t \\ 1 = -1-2t-2s \\ 1 = -t+s \end{cases} \iff \begin{cases} t = -1 \\ 1 = -1+2-2s \\ 1 = 1+s \end{cases} \iff \begin{cases} t = -1 \\ s = 0 \\ s = 0 \end{cases} \text{ ok!}$$

$$P_3 \in \alpha \iff \exists\, t, s \in \mathbb{R}: \begin{cases} 1 = 1+t \\ 1 = -1-2t-2s \\ -1 = -t+s \end{cases} \iff \begin{cases} t = 0 \\ 1 = -1-2s \\ -1 = s \end{cases} \iff \begin{cases} t = 0 \\ s = -1 \\ s = -1 \end{cases} \text{ ok!}$$

- Passo 3:

$$P_a \in \alpha \iff \exists\, a, t, s \in \mathbb{R}: \begin{cases} 2-a = 1+t \\ -1 = -1-2t-2s \\ 3 = -t+s \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} s = 3+t \\ -1 = -1-2t-2\cdot(3+t) \\ 2-a = 1+t \end{cases} \iff \begin{cases} a = t-1 \\ -4t-6 = 0 \\ s = 3+t \end{cases} \iff \begin{cases} a = t-1 \\ t = -3/2 \\ s = 3+t \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} a = -\frac{5}{2} \\ t = -3/2 \\ s = 3/2 \end{cases}$$; quindi $P_a \in \alpha \iff a = -\frac{5}{2}$.

INTRODUZIONE AI SISTEMI DI EQUAZIONI LINEARI IN PIÚ INCOGNITE:

- Un'equazione lineare ha la forma generale:

$$a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 + \dots + a_n x_n = b \quad \text{con } n \in \mathbb{N}$$

dove: ∘ $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ sono i coefficienti delle incognite;
∘ $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n \in \mathbb{R}$ sono le incognite;
∘ $b \in \mathbb{R}$ é il termine noto dell'equazione.

Una soluzione dell'equazione appena scritta é una n-upla di numeri reali $(y_1, y_2, y_3, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \dots \times \mathbb{R}$ (n-volte) tali che risulti:

$$a_1 y_1 + a_2 y_2 + a_3 y_3 + \dots + a_n y_n = b$$

- <u>Esempio:</u> sia data l'eq. lineare (cioé di 1° grado) con tre incognite:

$$3x_1 - x_2 - x_3 = 1$$

si puó facilmente verificare che una soluzione dell'eq. data é la terna di numeri $(1, 1, 1)$ infatti si ha che: $3 \cdot (1) - (1) - (1) = 1 \iff 3 - 2 = 1$
mentre $(0, 0, 1)$ non é soluzione dell'eq. infatti si ottiene: $3 \cdot (0) - (0) - (1) = 1 \iff -1 = 1$ impossibile!
Un'altra soluzione é la terna $(0, -1, 0)$ infatti: $3 \cdot (0) - (-1) - (0) = 1 \iff 1 = 1$ identitá.

- <u>Definizione 1 (sistema lineare):</u> la forma generale di un sistema lineare (cioé di 1° grado) di m equazioni in n incognite é:

$$\begin{cases} a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + a_{13} x_3 + \dots + a_{1n} x_n = b_1 & (1^a \text{ equazione}) \\ a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + a_{23} x_3 + \dots + a_{2n} x_n = b_2 & (2^a \text{ equazione}) \\ a_{31} x_1 + a_{32} x_2 + a_{33} x_3 + \dots + a_{3n} x_n = b_3 & (3^a \text{ equazione}) \\ \vdots \\ a_{m1} x_1 + a_{m2} x_2 + a_{m3} x_3 + \dots + a_{mn} x_n = b_m & (m^a \text{ equazione}) \end{cases}$$

dove: ∘ $m, n \in \mathbb{N}$ (ovviamente); n viene detto anche ordine del sistema
∘ i termini $a_{11}, a_{12}, \dots, a_{mn}$ sono i coefficienti delle incognite

* <u>Convenzione:</u> con il simbolo a_{ij} si indicherá il coefficiente del sistema relativo alla i-esima riga (cioé alla i-esima equazione del sistema) e j-esima incognita cioé x_j.

- <u>Definizione 2:</u> una soluzione del sistema appena scritto è una n-upla $(y_1, y_2, y_3, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ che sostituita ordinatamente alle incognite $x_1, x_2, x_3, \dots x_n$, soddisfa tutte le equazioni del sistema stesso.

- <u>Esempio:</u> sia dato il seguente sistema lineare:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 3 \\ x_1 - x_3 = 0 \end{cases}$$

una possibile soluzione del sistema è la terna $(1, -1, 1)$ infatti si ha che:

$$\begin{cases} (1) - (-1) + (1) = 3 \iff 2 + 1 = 3 \iff 3 = 3 & \text{verificata!} \\ (1) - (1) = 0 \iff 0 = 0 & \text{verificata!} \end{cases}$$

la terna $(0, 1, 4)$ invece non è soluzione del sistema infatti:

$$\begin{cases} (0) - (1) + (4) = 3 \iff -1 + 4 = 3 \iff 3 = 3 & \text{vera!} \\ 0 - 4 = 0 \iff -4 = 0 & \text{impossibile perché } -4 \neq 0. \end{cases}$$

anche la terna $(2, +1, 2)$ è soluzione del sistema infatti: $\begin{cases} 2 - 1 + 2 = 3 \\ 2 - 2 = 0 \end{cases}$

per cui il sistema ammette infinite soluzioni (*).

(*) Infatti come si vedrà fra poco se un sistema ammette 2 soluzioni allora ne ammette infinite altre.

Al sistema scritto nella forma generale si associano i seguenti simboli:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} ; \quad b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

delimitazione della matrice dei coefficienti delle incognite dalla matrice o colonna dei termini noti.

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} ; \quad A' = \left(\begin{array}{ccccc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array}\right)$$

dove:
- A è la matrice dei coefficienti delle incognite cioè una tabella in cui sono raccolti i numeri o meglio i coefficienti delle incognite suddivisi per righe cioè per equazioni e colonne cioè per incognite; A si dice anche matrice incompleta del sistema; la tabella sarà composta da m-righe ed n-colonne.
- b è la matrice dei termini noti o più precisamente colonna dei termini noti;
- x è la colonna delle incognite;
- A' è la matrice completa del sistema.

per brevità e per altri motivi che si vedranno in seguito il sistema scritto precedentemente può essere scritto nella forma $A x = b$.

- Esempio (notazioni): sia dato il seguente sistema:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 3 \\ x_1 - x_3 = 0 \end{cases}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} ; \quad b = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix} ; \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} ; \quad A' = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{array} \right)$$

Discutere un sistema lineare significa determinare tutte e sole le sue soluzioni; in tal caso un sistema si dice compatibile se ammette almeno una soluzione.
Vediamo ora un metodo per risolvere un sistema lineare, detto metodo d'eliminazione di Gauss.
Prima di descrivere tale metodo è opportuno fare la seguente introduzione:

- Definizione 3 (matrice quadrata): sia $A = (a_{ij})$ una matrice $m \times n$ dove con il simbolo (a_{ij}) si indicano tutti i termini ordinati secondo l'indice "i" relativo alle righe e "j" relativo alle colonne $(i, j \in \mathbb{N})$; si definisce matrice quadrata quella avente tante righe quante colonne cioè $m = n$. (*).
- Definizione 4 (diagonale principale): la diagonale principale di una matrice quadrata è la diagonale che va dall'angolo in alto a sinistra a quello in basso a destra ed è quindi composta da tutti gli elementi a_{ij} con $i = j$.

(*) Con (a_{ij}) si intende l'elemento della matrice di posto (i, j) cioè i-esima riga e j-esima colonna; una matrice in cui il numero delle righe è diverso da quello delle colonne cioè $m \neq n$ si dice rettangolare.

- Esempio 1:

diagonale principale.

$$A = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 4 & 2 \\ 1 & -2 & 2 & 3 \end{array} \right)$$

- Definizione 5: una matrice quadrata A è detta diagonale se tutti gli elementi che non appartengono alla diagonale sono nulli; si dice invece che la matrice è triangolare superiore se tutti gli elementi al di sotto della diagonale principale sono nulli cioè se $\forall\, j < i,\ a_{ij} = 0$ dove con a_{ij} si indica il generico elemento della matrice posto alla i-esima riga e j-esima colonna. Infine una matrice si dice triangolare inferiore se invece sono nulli gli elementi sopra la diagonale principale, cioè $\forall\, i<j$ $a_{ij}=0$.

- Esempio 2:

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & \sqrt{2} & e \\ 0 & 0 & \pi \end{pmatrix} \qquad A_2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ \sqrt{2} & \pi & 0 \\ -1 & 3 & e^{\pi} \end{pmatrix} \qquad A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{\pi} & 0 \\ 0 & 0 & e^2 \end{pmatrix}$$

A_1 = triangolare superiore $\quad A_2$ = triangolare inferiore $\quad A_3$ = diagonale.

- Definizione 6 (sistema triangolare superiore): un sistema lineare quadrato (cioè con tante equazioni quante incognite o ancor meglio tale che la matrice dei coefficienti associata sia quadrata) si dice triangolare se la sua matrice associata relativa ai coefficienti è triangolare superiore,

- Esempio: il seguente sistema è triangolare superiore:

$$\begin{cases} 4x - 3y + 4z = 1 \\ 2y - 3z = 8 \\ 3z = -6 \end{cases}$$ infatti la matrice associata $A = \begin{pmatrix} 4 & -3 & 4 \\ 0 & +2 & -3 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ è triangolare superiore.

Osservazione 1 il sistema precedente è di facile risoluzione infatti basta procedere all'indietro e si ottiene; $z=-2 \Rightarrow 2y = 8+3z \Rightarrow y=1 \Rightarrow 4x = 1+3y-4z$ $\Rightarrow x=3$ quindi la terna $(3,1,-2)$ è soluzione, unica o univoca, del sistema. Questo esempio introduce la seguente:

- Proposizione: un sistema lineare triangolare superiore della forma $Ax=b$ di ordine "n", cioè con "n" equazioni in "n" incognite ammette una ed una sola soluzione se e solo se tutti gli elementi della diagonale principale della matrice A dei coefficienti sono diversi da zero, cioè sono non nulli.

Senza entrare in maggiori dettagli vediamo alcuni esempi in cui non è verificata l'ipotesi della proposizione appena enunciata (che dimostreremo più avanti, (in seguito)).

① Risolvere il seguente sistema lineare:

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = 1 \\ 3x_3 = 1 \iff x_3 = 1/3 \\ x_3 = 1 \iff x_3 = 1 \end{cases}$$

impossibile cioè il sistema è incompatibile (non ha soluzioni, cioè $\nexists\,(y_1,y_2,y_3)\in\mathbb{R}^3$ tale che il sistema sia soddisfatto).

Infatti la matrice associata risulta:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$ dove il termine $a_{22} = 0$ c.v.d.

(2) Risolvere ora il seguente sistema:

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = 1 \\ 3x_3 = 6 \iff x_3 = 2 \\ -2x_3 = -4 \iff x_3 = 2 \end{cases} \iff \begin{cases} x_1 = -1 + 2x_2 \\ x_2 \in \mathbb{R} \\ x_3 = 2 \end{cases}$$ è indeterminato

la matrice associata dei coefficienti è

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$ dove il termine $a_{22} = 0$ c.v.d.

• <u>Metodo di eliminazione di Gauss:</u>

* <u>Introduzione:</u>

- <u>Definizione 1 (sistemi lineari equivalenti):</u> due sistemi lineari (anche non quadrati) dello stesso ordine si dicono equivalenti se ammettono esattamente le stesse soluzioni

L'idea che si sta introducendo ora è la seguente: risolvere o meglio dimostrare un sistema lineare qualsiasi riducendolo ad un'altro sistema equivalente più semplice, che è appunto un sistema lineare triangolare superiore.

- <u>Metodi di risoluzione generali:</u> ora vedremo alcuni esempi di risoluzione generali e da questi se ne trarremo alcune conclusioni importanti.

<u>Esempio 1</u>: sia da risolvere il seguente sistema:

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 - x_2 + 4x_3 = 2 \\ x_1 - 2x_2 + 2x_3 = 3 \end{cases}$$

<u>1° passo</u> → dalla **2ª** equazione si può sottrarre la 1ª equazione ottenendo il sistema equivalente:

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = 1 \\ 0 + x_2 + 3x_3 = 1 \\ x_1 - 2x_2 + 2x_3 = 3 \end{cases}$$

<u>2° passo</u> → dalla 3ª equazione si sottrae la 1ª equazione ottenendo il sistema:

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = 1 \\ 0 + x_2 + 3x_3 = 2 \\ 0 + 0 + x_3 = 2 \end{cases}$$

(*) I passaggi relativi alla risoluzione del sistema sono leciti per i principi di equivalenza delle equazioni e le leggi (+), (·) con le relative proprietà.

Il sistema ottenuto come si può osservare è Triangolare superiore quindi procedendo con la risoluzione all'indietro si ottiene in definitiva la soluzione cercata (che è unica!)

$$\begin{cases} x_1 = 1 + 2x_2 - x_3 = 1 + 2\cdot(-5) - 2 = -11 \\ x_2 = 2 - 3x_3 = 2 - 3\cdot 2 = 2 - 6 = -5 \\ x_3 = 2 \end{cases} \iff \begin{cases} x_1 = -11 \\ x_2 = -5 \\ x_3 = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} -11 \\ -5 \\ 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3.$$

Da questo esempio si è visto che per trasformare un sistema lineare di partenza ad uno più semplice di forma Triangolare si sono applicate una delle due operazioni elementari che si possono effettuare sui sistemi lineari e che si possono così riassumere:

1) Scambiare l'ordine delle equazioni in un sistema lineare si ottiene un sistema equivalente a quello dato;
2) sommare algebricamente una equazione del sistema con un multiplo di un'altra equazione del sistema stesso si ottiene un sistema equivalente a quello dato.

L'operazione elementare di cui al punto 2) viene chiamata <u>combinazione lineare</u> di un'equazione con un'altra equazione data.

- <u>Definizione 2 (combinazione lineare)</u>: date due equazioni lineari

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n = a \quad e \quad b_1x_1 + b_2x_2 + \dots + b_nx_n = b$$

si dice combinazione lineare delle due equazioni date l'equazione equivalente:

$$h\cdot(a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n) + k\cdot(b_1x_1 + b_2x_2 + \dots + b_nx_n) = ha + kb$$

con $h, k \in \mathbb{R}$.

Il metodo di eliminazione di Gauss è una procedura che partendo da un sistema lineare quadrato (in seguito si vedrà che sarà applicabile anche a sistemi non quadrati) qualsiasi mediante operazioni elementari (punti 1) e 2)) si può trasformare in un sistema triangolare superiore equivalente che si risolve procedendo all'indietro (cioè si applica la risoluzione all'indietro).

Le operazioni elementari analizzate precedentemente si possono applicare più agevolmente sulle matrici associate al sistema e in tal caso si possono enunciare come segue:

1) Scambiando l'ordine delle righe (cioè delle equazioni) il sistema che si ottiene ammette le stesse soluzioni;
2) eseguendo la combinazione lineare delle righe o meglio sostituendo ad una riga la combinazione lineare di due righe si ottiene un sistema lineare equivalente a

quello dato.

- Esempio 2: si risolva mediante operazioni elementari sulla matrice associata il seguente sistema (vedi anche esempio 1):

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 - x_2 + 4x_3 = 2 \\ x_1 - 2x_2 + 2x_3 = 3 \end{cases} \Rightarrow A = \begin{array}{c c} \text{coefficienti incognite ; termini noti} & \\ \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & +1 & 1 \\ 1 & -1 & 4 & 2 \\ 1 & -2 & +2 & 3 \end{array}\right) & \begin{array}{c} R_1 \\ R_2 \\ R_3 \end{array} \end{array}$$

1° Passaggio:

$$A = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right) \begin{array}{l} R_1 \\ R_2 - R_1 \\ R_3 - R_1 \end{array} \quad \text{(matrice triangolare superiore).}$$

quindi si ottiene il sistema triangolare superiore:

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = 1 \\ x_2 + 3x_3 = 1 \\ x_3 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 1 + 2x_2 - x_3 = 1 + (-10) - 2 = -11 \\ x_2 = 1 - 3x_3 = 1 - 6 = -5 \\ x_3 = 2 \end{cases}$$

che risolto all'indietro fornisce la soluzione:

$$\begin{cases} x_1 = -11 \\ x_2 = -5 \\ x_3 = 2 \end{cases}$$ analoga a quella trovata nell'esempio 1.

- Esempio **3**: sia dato il sistema:

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 = 0 \\ 3x_1 + x_2 = 1 \end{cases} \Rightarrow A = \left(\begin{array}{cc|c} 2 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} R_1 \\ R_2 \end{array}$$

1° Passaggio:

$$A = \begin{array}{c} \text{matrice triang. superiore} \\ \left(\begin{array}{cc|c} 2 & -1 & 0 \\ 0 & \frac{5}{2} & 1 \end{array}\right) \end{array} \begin{array}{l} R_1 \\ R_2 - \frac{3}{2}R_1 \end{array} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x_1 - x_2 = 0 \\ \frac{5}{2}x_2 = 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 2/5 \cdot 1/2 = 1/5 \\ x_2 = 2/5 \end{cases}$$

- Esempio 4: sia da discutere il seguente sistema:

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 2 \\ x_1 - 2x_2 + 2x_3 = 2 \end{cases}$$

La matrice associata è :

$$A = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 4 & 2 \\ 1 & -2 & 2 & 2 \end{array}\right) \begin{array}{l} R_1 \\ R_2 \\ R_3 \end{array}$$

<u>1° Passaggio :</u>

$$A = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} R_1 \\ R_2 - R_1 \\ R_3 - R_1 \end{array} \Rightarrow \begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = 1 \\ 3x_3 = 1 \\ x_3 = 1 \end{cases}$$

quindi $x_3 = \frac{1}{3} \wedge x_3 = 1$ impossibile per cui il sistema è incompatibile cioè $\nexists \, (y_1, y_2, y_3)$ soluzione del sistema

Questo esempio mette in evidenza che se un termine della diagonale principale è nullo $\Rightarrow$ il sistema ~~o~~ è indeterminato (cioè ammette infinite soluzioni) o è incompatibile (cioè impossibile).

- <u>Esempio **5**:</u> si consideri ora il seguente sistema:

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 7 \\ x_1 - 2x_2 + 2x_3 = 3 \end{cases}$$

la matrice associata A (completa) è : $A = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 4 & 7 \\ 1 & -2 & 2 & 3 \end{array}\right) \begin{array}{l} R_1 \\ R_2 \\ R_3 \end{array}$

$$\Longleftrightarrow A = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right) \begin{array}{l} R_1 \\ R_2 - R_1 \\ R_3 - R_1 \end{array} \Rightarrow \begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = 1 \\ 3x_3 = 6 \\ x_3 = 2 \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} x_1 - 2x_2 = -1 \\ x_3 = 2 \\ x_3 = 2 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x_1 = 2x_2 - 1 \\ x_3 = 2 \end{cases}$$

in quest'ultimo caso si vede che la variabile x_2 è libera cioè può assumere qualsiasi valore reale; posto $x_2 = t$, con $t \in \mathbb{R}$ (parametro) si avrà che $\forall x_2 \in \mathbb{R}, \exists x_1 \in \mathbb{R}$ tale che la terna :

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 + 2x_2 \\ x_2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

sia la soluzione del sistema dato;

il sistema ammetterà infinite soluzioni che si possono considerare scritte come