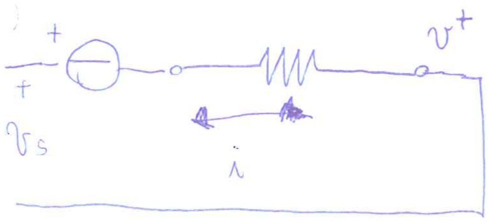
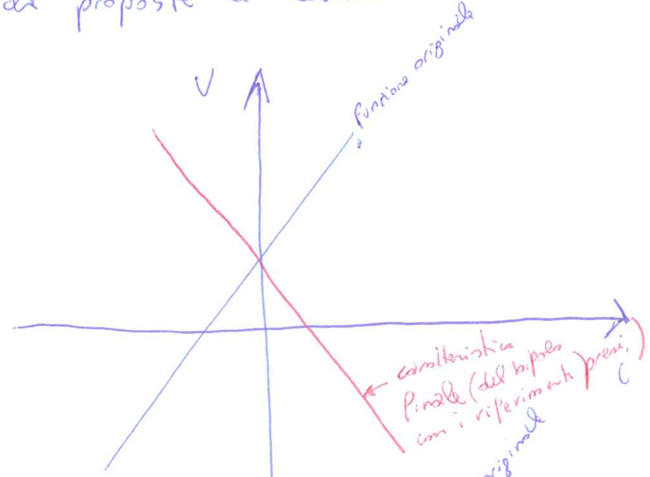
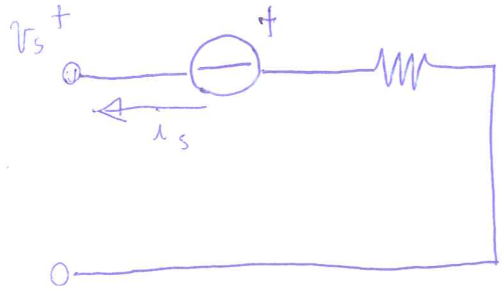
12/03/2012 $\quad$ II^a settimana

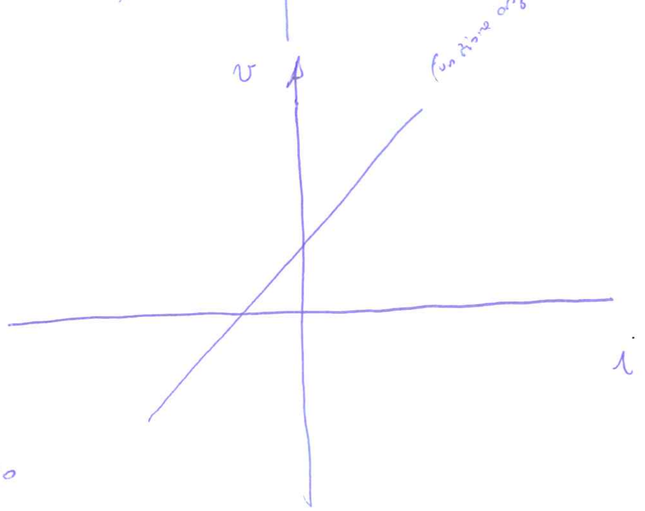
verifica delle caratteristiche statiche proposte a lezione.



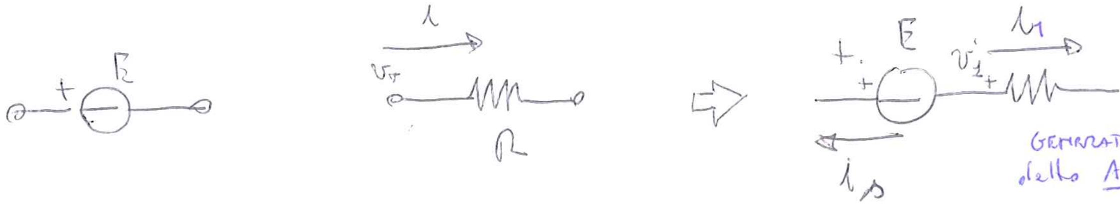


GIRIAMO IL GENERATORE DI TENSIONE



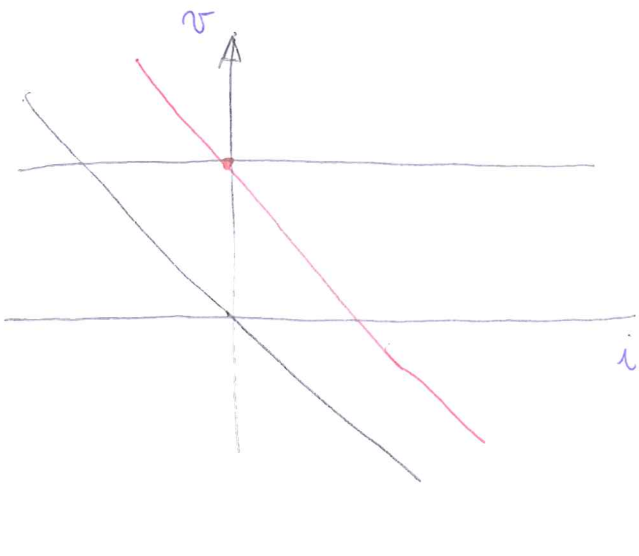


I riferimenti si fissano ad arbitrio



GENERATORE REALE detto <u>AFFINE</u> di tensione

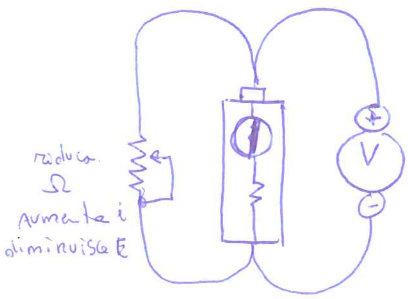
Se un bipolo inserito nella rete ha un riferimento imposto diverso da quello naturale allora la caratteristica del bipolo cambia per simmetria rispetto al parametro che ha il riferimento invertito



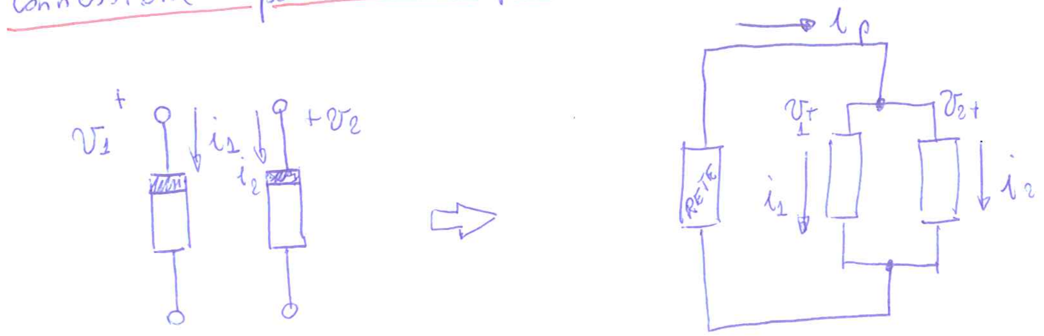
$$i_1 = -i_s$$

$$v = E + R i_1$$

$$= E - R i_s$$



Connessione parallelo di bipoli



non è solo una questione geometrica, ma fisica

deve valere:

$$\begin{cases} v_p = v_1 = v_2 \\ i_p = i_1 = i_2 \end{cases}$$

* La tensione del parallelo deve essere uguale alla tensione di ogni singolo componente del parallelo
* La corrente entrante al parallelo è pari alla somma delle correnti nei singoli bipoli del parallelo

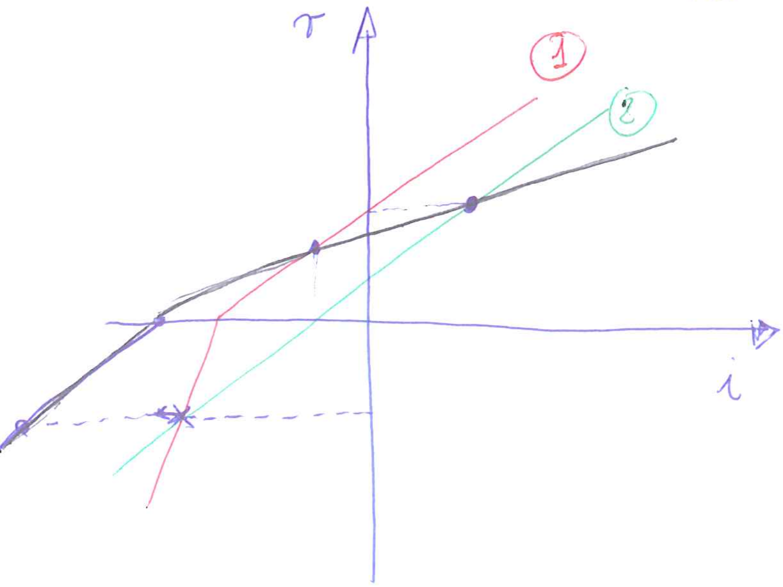
$i_1 = g_1(v_1) \qquad i_2 = g_2(v_2)$

$$i_p = g_1(v_1) + g_2(v_2) = g_1(v_p) + g_2(v_2)$$

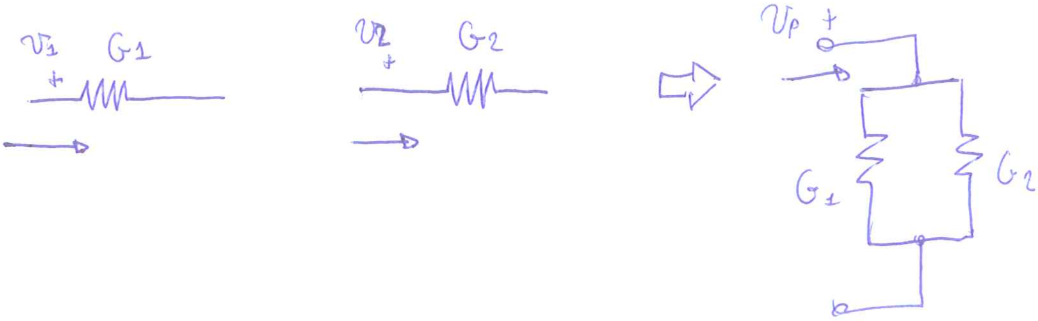
$$= (g_1 \oplus g_2)\, v_p$$

$$\boxed{i_p = (g_1 \oplus g_2)\, v_p}$$

vediamo un esempio riprendendo le stesse caratteristiche dell'esempio dei bipoli in serie



in serie sull'asse v-i le pendenze si sommavano in parallelo invece le pendenze si sottraggono, quindi sembra che si abbia una diminuzione di resistenza.

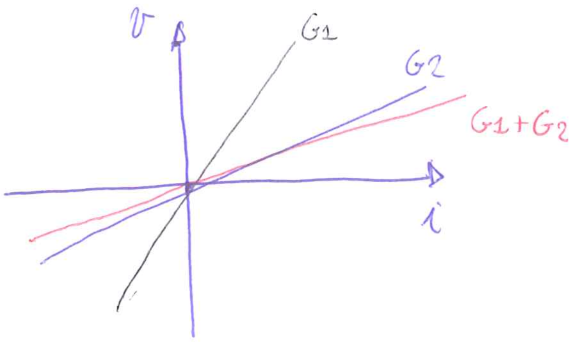


mettendo due bipoli resistori in parallelo si ottiene un nuovo bipolo resistore

la conduttanza è la somma delle conduttanze dei singoli bipoli resistori.

Si parla di conduttanze e non di resistori per mantenere la dualità sulla definizione fatta per la serie in termini di resistenze, ovvero vogliamo mantenere il termine somma nella definizione data

$$i_p = i_1 + i_2 = G_1 v_1 + G_2 v_2 = (G_1 + G_2) v_p$$



$$G_p = G_1 + G_2$$

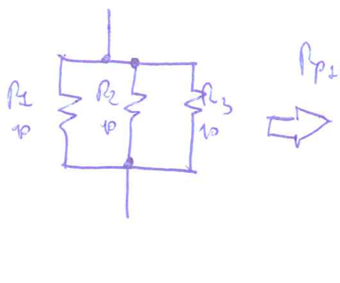
$$R_p = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$$

$$G_p = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \qquad \frac{1}{R_p} = \frac{R_1 + R_2}{R_1 R_2}$$

ATTENZIONE non si può fare per 3 resistori $R_p = \cancel{\frac{R_1 R_2 R_3}{R_1+R_2+R_3}}$ perché al numeratore ho Ω^3 e al denominatore Ω quindi dimensionalmente non torna, quindi bisogna fare il parallelo a coppie di due.

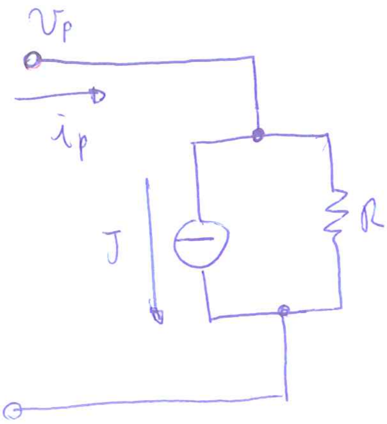
ERRORE DA NON FARE

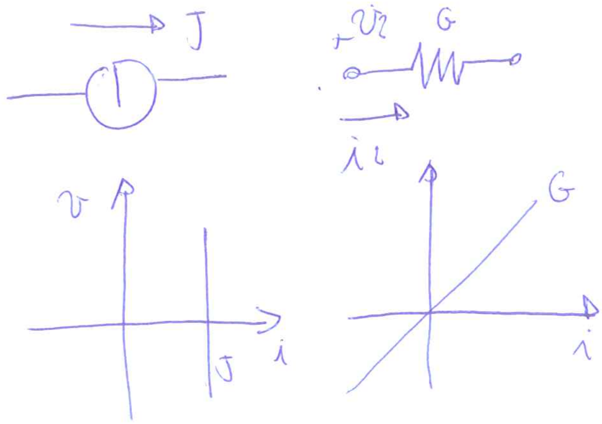
se faccio $\frac{10\cdot10\cdot10}{30} = 33{,}3$

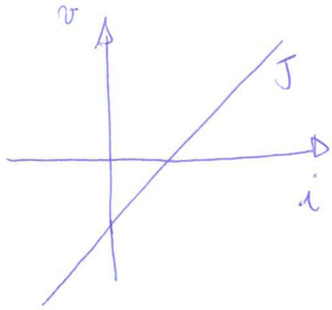


$$R_{p1} = \frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2} = \frac{10 \cdot 10}{20\,\Omega} = 5\,\Omega$$

$$\frac{R_{p1} \cdot R_3}{R_{p1} + R_3} = \frac{5 \cdot 10}{15} = \frac{50}{15} = 3{,}33\,\Omega$$



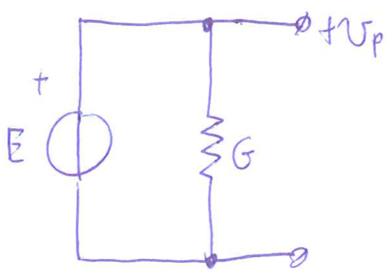


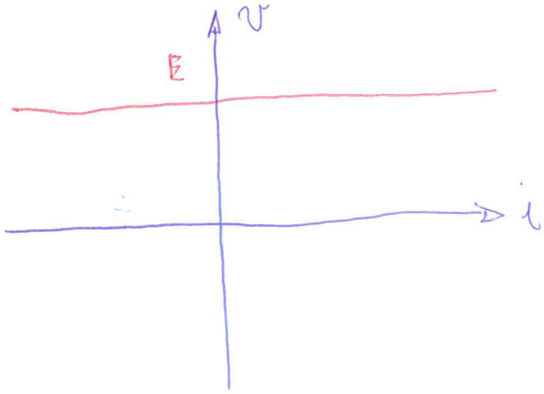


Per esercizio provare tutte e 4 le combinazione dei bipoli convenzionando il bipolo da generatore o da utilizzatore

Da questi giochini di ribaltamento si arriverà al teorema di thevenen.

caso duale al generatore di corrente con in serie il resistore, ovvero il generatore di tensione in parallelo a un generatore di tensione, ovvero si ottiene la caratteristica del generatore reale di tensione dunque visto "esternamente" è sostituibile con un unico generatore di tensione. fine cap. 3 del libro di GUARNIERI

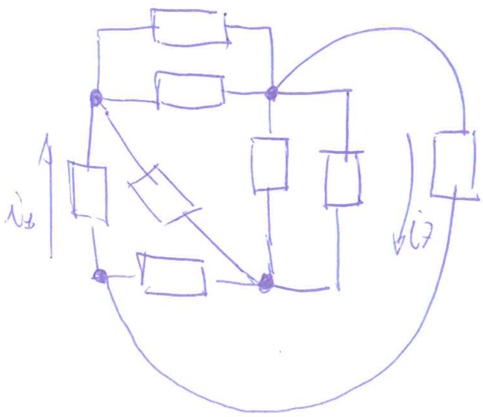




Finora si è parlato di TIPOLOGIA dei bipoli della rete e quindi di TIPOLOGIA anche della rete.

una rete elettrica è caratterizzata da m- e n-bipoli interconnessi, dai quali si ottiene una caratteristica esterna.
Vediamo adesso la TOPOLOGIA della rete

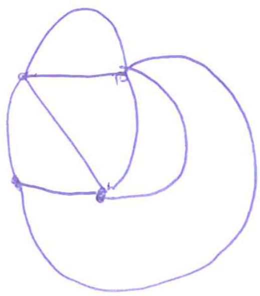
TOPOLOGIA



ciascuno dei bipoli, come sappiamo è caratterizzato da una caratteristica tensione e corrente.
Ora si studia il tipo di connessione e interconnessione che si studia con la teoria dei grafi.

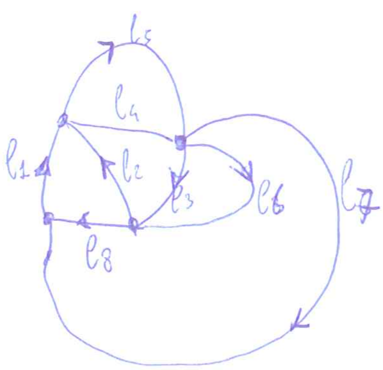
Lo scheletro della rete elettrica, che si ottiene dalla morfologia, è rappresentato da un grafo

mentre la rete considera Topologia e Tipologia il grafo tiene conto solo della Topologia



GRAFO DELLA RETE trascura i tipi di bipolo. Le entità topologiche sono i NODI "n" e i lati "l" o rami.

Un nodo è un punto di confluenza di più lati. In questo grafo $n = 4$ e $l = 8$ $(m = 4)$ ← sono gli anelli
Da qui è possibile ad esempio trovare un grafo ridotto riducendo ad un lato unico i lati in parallelo.
Vediamo come caratterizzare il grafo tramite una matrice detta di incidenza.



Posso orientare i lati con delle frecce coerenti con le correnti o meglio i riferimenti posti per le correnti ottenendo un grafo orientato.

otteniamo la matrice di incidenza

$$
\begin{array}{c|cccccccc}
 & l_1 & l_2 & l_3 & l_4 & l_5 & l_6 & l_7 & l_8 \\
\hline
n_1 & +1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 \\
n_2 & -1 & -2 & 0 & +1 & +1 & 0 & 0 & 0 \\
n_3 & 0 & 0 & +1 & -1 & -1 & +1 & +1 & 0 \\
n_4 & 0 & +1 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & +1
\end{array}
$$

L'informazione +1, -1 è importante se i riferimenti di corrente sono messi coerenti con i riferimenti dei lati

Definiamo 4 entità fondamentali

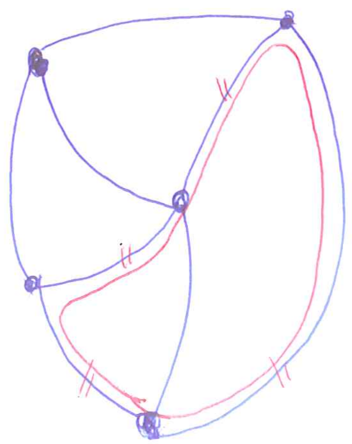
1) maglia
2) insieme di taglio
3) Albero
4) coalbero

CONCETTO DI MAGLIA

si dice maglia di un grafo un insieme di lati del grafo stesso che soddisfa 2 proprietà

1ª i lati dell'insieme sono tra loro interconessi (esiste un percorso continuo)

2ª in ogni nodo incidono due e solo due lati dell'insieme



$\nparallel$ lati dell'insieme

—— percorso della maglia

Una maglia è individuata da un percorso chiuso in cui non si passa due volte per lo stesso nodo.

Una maglia particolare si chiama ANELLO, quando la superficie della maglia non è mai attraversata da nessun lato. (coincide con i buchi senza lati dentro). Le reti piane hanno il grafo spalmabile sul piano senza intersezioni per individuare il numero di anelli presenti fare:

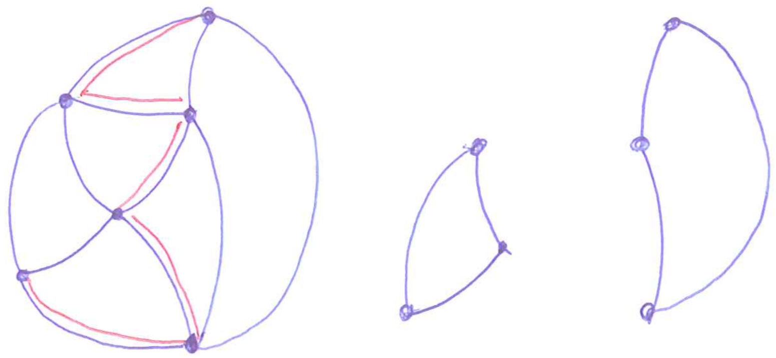
$$m = l - (n-1)$$

numero di anelli della rete piana

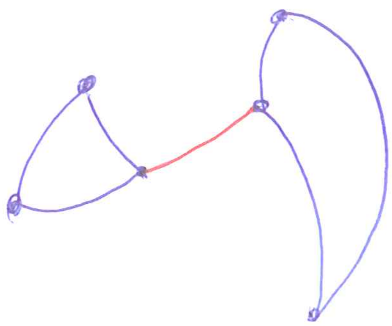
INSIEME DI TAGLIO - o tagli di una rete, è un insieme dei lati di una rete che soddisfa le seguenti condizioni

1ª) rimuovendo tutti i lati dell'~~insieme~~ insieme si ottengono due grafi separati

2ª) rimuovendo tutti i lati dell'insieme meno 1 si ottiene un grafo connesso.

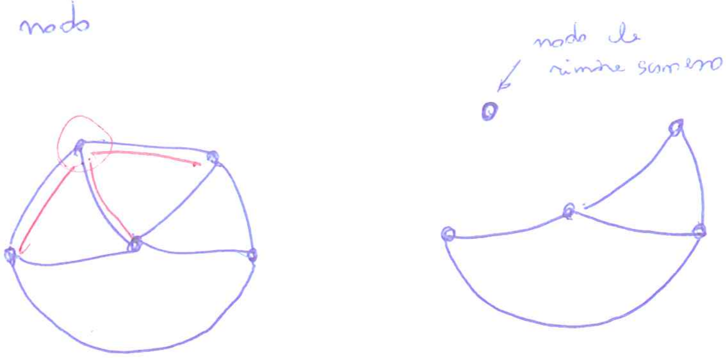


Prima proprietà

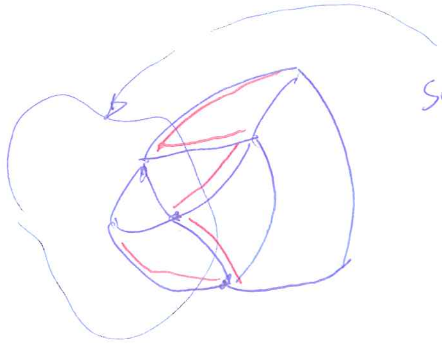


Seconda proprietà

L'insieme di taglio è riferibile anche ai lati che fanno capo a un nodo



un insieme di lati è un insieme di tagli se la superficie è costruita in modo che l'arco che contiene e eliminati i lati si ottiene due anelli concentrici

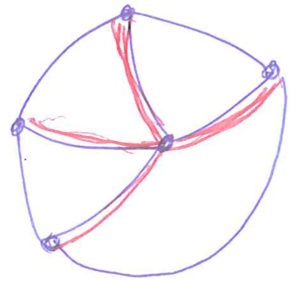


superficie costruita per separare i due grafi

ALBERO

a) contiene tutti i nodi del grafo

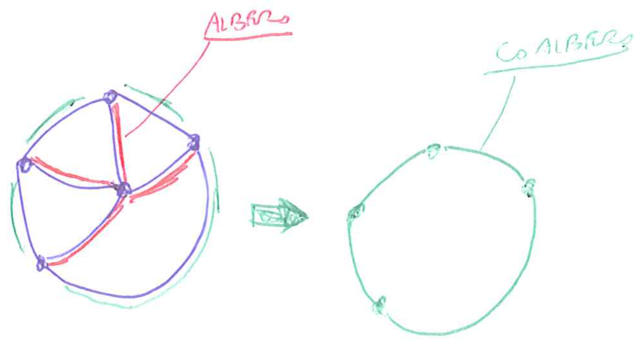
b) non forma alcuna maglia



Attenzione, l'albero non è mai univoco possono coesistere più alberi.
Uno di questi è quello di copertura minima. minimum spanning tree

CO-ALBERO

Insieme dei lati di un grafo complementari ad un albero



su albero e coalbero si fanno due considerazioni,

$$l_a = n-1$$ lati dell'albero

$$l_c = m = l-(n-1)$$ i lati di coalbero coincidono con le maglie.

16/03/2012 LEZ. 6

Gli elementi dei grafi sono: $l \rightarrow$ lati, $n \rightarrow$ nodi, $l_a = n-1$,
(albero)

$l_c = m = l - (n-1)$ $m =$ numero di anelli
(coalbero)

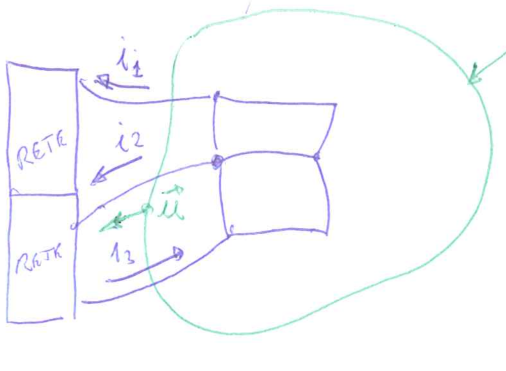
LKC Legge di Kirchhoff alle correnti
LKT Legge di Kirchhoff alle tensioni

} Sono leggi topologiche quindi riferite ad un grafo

Sotto la condizione di applicazione ad un grafo:
La sommatoria delle correnti all'insieme di taglio è pari a zero
si presuppone che l'insieme di taglio sia orientato.

$$\boxed{\sum_{\text{taglio}} \pm\, i_i(t) = 0}$$

per ogni lato si fissa il riferimento della corrente ma bisogna porre il riferimento anche all'insieme di taglio.
I riferimenti dei lati quindi saranno concordi o discordi a seconda dell'orientamento dell'insieme di taglio



$$+i_1 + i_2 - i_3 = 0$$

Attenzione, i segni sono dati dagli orientamenti, poi si circonda con parentesi tonde e si mette il vero segno delle correnti come dati (il valore): esempio

$$+(i_1) + (i_2) - (i_3) = 0$$

se $i_1 = +16\,A$
$i_2 = -25\,A$
$i_3 = -9$

$$+(+16) + (-25) - (-9) = 0$$

Il duale dell'insieme di taglio è la maglia, e si ottiene il secondo principio di Kirchhoff. LKT

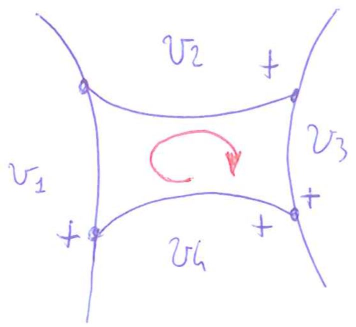
$$\boxed{\sum \pm v_i(t) = 0}$$

per ogni maglia la sommatoria delle tensioni dei lati di maglia è pari a zero.

Vale per ogni maglia.

1) obbligatori i riferimenti per ogni tensione
2) obbligatori il riferimento per la maglia

La maglia è un percorso chiuso, quindi si può orientare in senso orario o antiorario.



* Riferimenti concordi si sommano
* Riferimenti discordi si sottraggono

$$+(+100) - (+240) - (-200) + (-60) = 0$$

ESEMPIO supponiamo di trovarci in una rete elettrica con l-lati

Si vuole risolvere la rete, ovvero conoscere per ogni bipolo il valore della tensione e della corrente. quindi due incognite per bipolo

in totale ci saranno $2l$ incognite
- l sono tensioni
- l sono correnti

Sistemi di $2l$ equazioni

$l \to$ tipologiche
- $v = f(i)$
- $i = f(v)$

equazioni sono:

le altre l equazioni, che sono topologiche, le trovo con le leggi di Kirchhoff.

$l \to$ topologiche
- LKC
- LKT

Dobbiamo capire quale il numero massimo di equazioni linearmente indipendenti che possiamo scrivere.

Si farà riferimento ai sistemi generati dalle maglie fondamentali devo trovare maglie, dal punto di vista topologico, delle maglie tra di loro indipendenti, ovvero che abbiano un lato che appartengono solo a quella maglia.

L'insieme delle equazioni del sistema devono essere tra loro linearmente indipendente.

Come tirare fuori un sistema di maglie fondamentali? con il metodo Albero - Coalbero.

$l = 8 \quad n = 5$

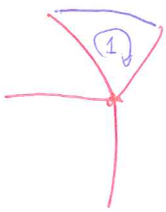
$l_a = 4$

$l_c = 4$

$l_c = m = l - (n-1)$

1) traccio l'albero
2) Aggiungo per ogni maglia identificata, un solo lato di coalbero

es:

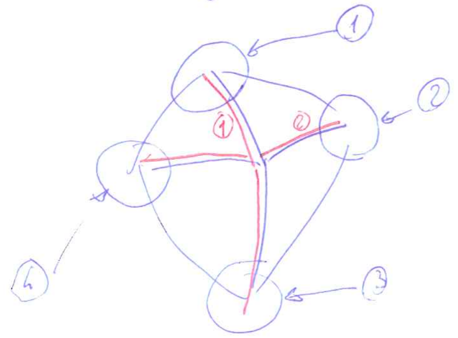


La maglia trovata è identificata dal solo lato di coalbero aggiunto

$$\begin{cases} \text{eq. 1 su maglia 1} \\ \text{eq. 2 su maglia 2} \\ \text{eq. 3 su maglia 3} \\ \text{eq. 4 su maglia 4} \end{cases}$$

Le equazioni indipendenti sono quindi 4 cioè $n-1$

Proviamo a costruire un sistema di insiemi di taglio indipendenti.
Farò in modo che ogni insieme di tagli abbia un lato indipendente.



Le sfere sono gli insiemi di tagli indipendenti perché ognuno ha 1 variabile esclusiva, un lato esclusivo che rappresenterà una corrente esclusiva

queste sono condizione necessarie ma non sufficienti come si vede considerando i nodo centrale.

Se consideriamo le LKT allora le equazioni linearmente indipendenti coincidono con le maglie indipendenti.

POSSIAMO RISOLVERE LE RETI CON LKT e LKC.

in ambito topologico definiamo e dimostriamo il teorema di tellegen

SI PRETENDE ENUNCIATO E DIMOSTRAZIONE

Il teorema di Tellegen è un teorema topologico e quindi si riferisce a un grafo.

1) convenzionare tutti i bipoli da utilizzatori (le correnti entranti nel positivo delle tensioni)

2) Prendere un sistema di tensioni $\{v_h\}$ che soddisfi le LKT

3) Prendere un sistema di correnti $\{i_h\}$ che soddisfi le LKC

IPOTESI

$\{v_h\}_{h=1,l} \rightarrow$ LKT

$\{i_h\}_{h=1,l}$ LKC

Tesi

$$\boxed{\sum_{h=1}^{l} v_h \cdot i_h = 0}$$

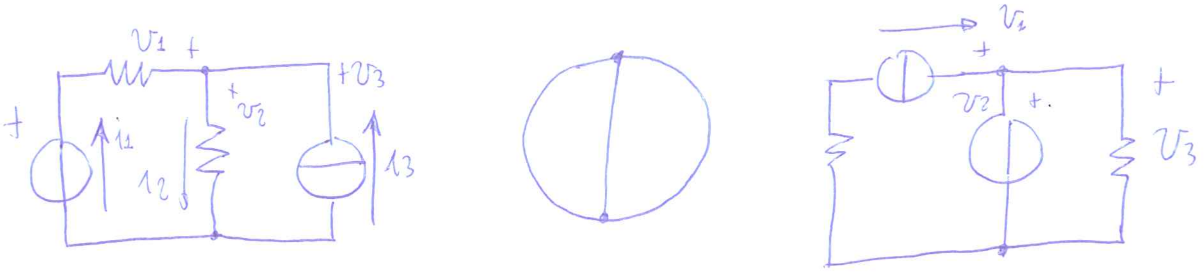
Perché tellegen è di tipo topologico? perché prese due reti diverse potrebbero avere due tipologie diverse ma resta valido

QUINDI NON SI PARLA DI CONSERVAZIONE DI POTENZA MA DELLA POTENZA VIRTUALE

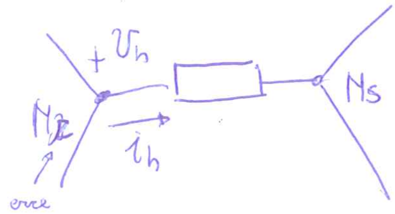
Le potenze virtuali dimensionalmente sono potenze ma possono essere riferite a momenti diversi e quindi avere valori diversi.

ATTENZIONE! Esistono due tipi di dimostrazione 1) Algebrica 2) Matriciale

Vediamo un esempio di due reti che hanno lo stesso grafo.



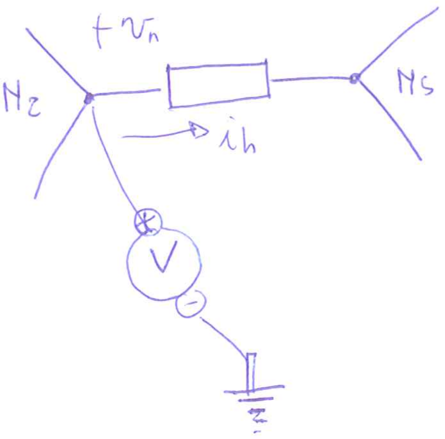
esempio: consideriamo la situazione al bipolo sottoriportato



$$v_h \cdot i_h = \left(u_{M_r} - u_{M_s}\right) i_{M_r M_s}$$

erre esse erre esse

Per la misura dei potenziali mi posso riferire alla terra, come nella prossima figura:



$$\sum_{h=1}^{\ell} v_h i_h = \frac{1}{2} \underbrace{\sum_{r=1}^{n} \sum_{s=1}^{n}}_{\text{sui nodi}} \left(u_{M_r} - u_{M_s}\right) i_{M_r M_s}$$

Si mette $\frac{1}{2}$ perché i nodi vengono considerati due volte.

$$\sum_{h=1}^{\ell} v_h i_h = \frac{1}{2} \sum_{r=1}^{n} u_{M_r} \underbrace{\sum_{s=1}^{n} i_{M_r M_s}}_{=0 \text{ per LKC}} - \frac{1}{2} \sum_{s=1}^{n} u_{M_s} \overbrace{\sum_{r=1}^{n} i_{M_r M_s}}^{=0 \text{ per LKC}} = 0 \quad \underline{\text{CVD}}$$

uguale a — la differenza fa zero

Serve per vedere se le potenze tra utilizzatori e generatori sono conservati e quindi anche per verificare se la soluzione trovata per la rete è corretta.

A tanta potenza uscente deve corrispondere tanta potenza entrante

$$\boxed{\sum_{h=1}^{l_{\text{utilizzatori}}} v_h i_h = \sum_{h=1}^{l_{\text{generatori}}} v_h i_h}$$

bilancio delle potenze alla tellegen

fine cap. 4

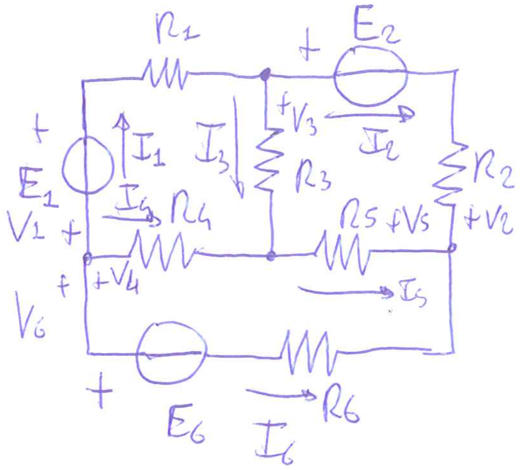
Analisi delle reti lineari adinamiche

Reti elettriche lineari di bipoli adinamiche: (di ordine zero)

I generatori AFFINI sono i generatori normali di tensione e di corrente

ESEMPIO PRATICO

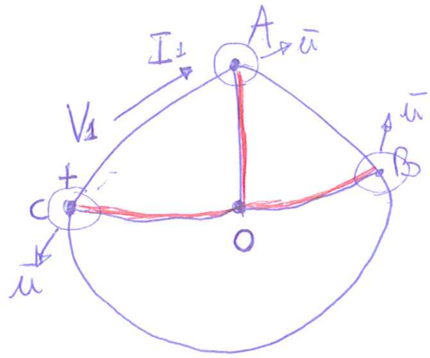
www.circuitlab.com



$l = 6$

$n = 4$

$m = 4$



Per prima cosa disegno il grafo corrispondente

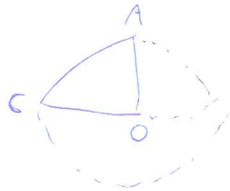
1) Disegnamo un Albero e trovo le LKC che sono $n-1=3$

$$\begin{cases} -I_1 + I_2 + I_3 = 0 \\ -I_5 - I_2 - I_6 = 0 \\ +I_1 + I_4 + I_6 = 0 \end{cases}$$

USANDO I VERSORI USCENTI

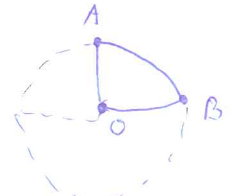
ORA COSTRUIAMO LE MAGLIE INDIPENDENTI AGGIUNGENDO ALL'ALBERO UN LATO DI COALBERO (PER OGNI MAGLIA)

LKT → AOCA



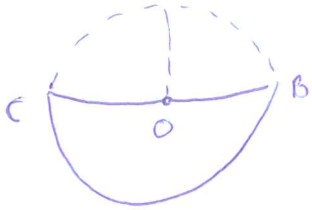
$+V_1 + V_3 - V_4 = 0$

ABOA



$+V_5 - V_3 - V_5 = 0$

COBC

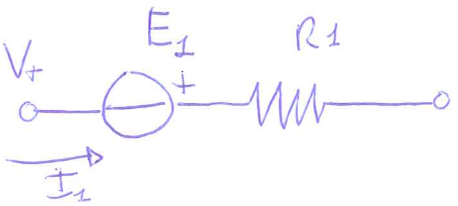


$$+V_4 - V_5 - V_6 = 0$$

Quindi il sistema di l equazioni Topologiche sono

$$\begin{cases} -I_1 + I_2 + I_3 = 0 \\ -I_5 - I_2 - I_6 = 0 \\ +I_1 + I_4 + I_6 \\ V_1 + V_3 - V_4 = 0 \\ +V_5 - V_3 - V_5 = 0 \\ +V_4 - V_5 - V_6 = 0 \end{cases}$$

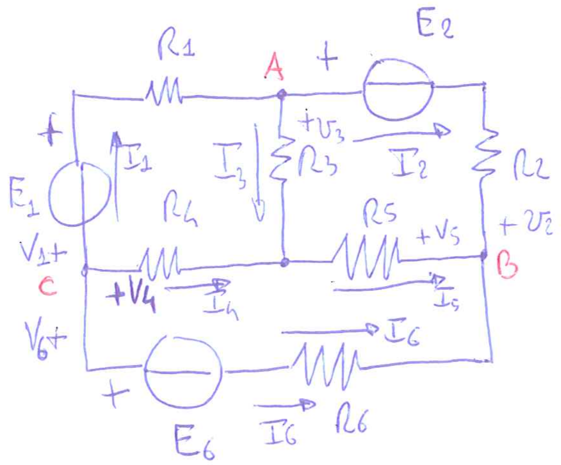
Adesso vediamo le equazioni tipologiche



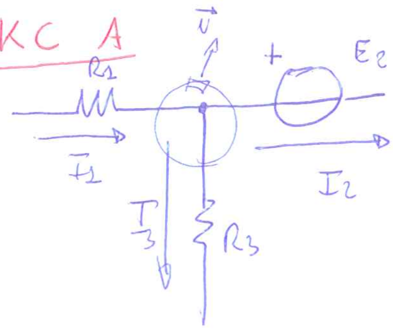
$$\boxed{V_1 = -E_1 + R_1 I_1}$$

Per esercizio completare gli enne bipoli equivalenti per ogni lato della rete.

15/03/2012 ESERCIZIO IN FORMA NUMERICA

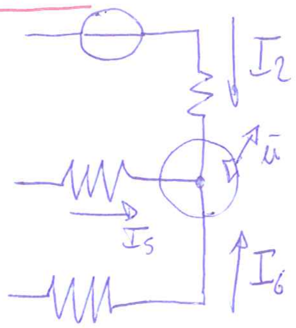


LKC A



$$-I_1 + I_2 + I_3 = 0$$

LKC B

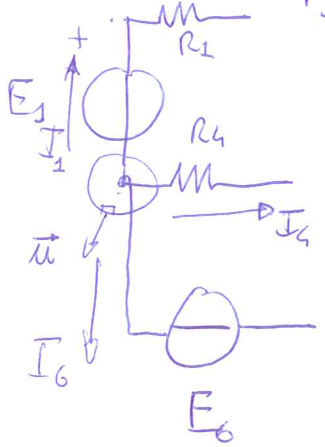


$$-I_2 \cancel{+} I_5 - I_6 = 0$$

→ TUTTI NEGATIVI

LKC C

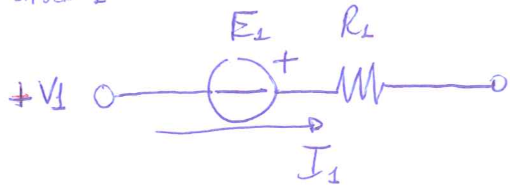
$$+I_1 + I_4 + I_6 = 0$$



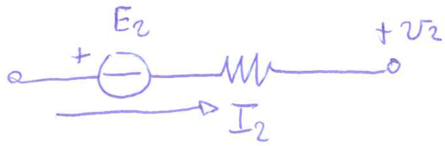
LKT

$$\begin{cases} V_1 = -E_1 + R_1 I_1 \\ V_2 = -E_2 - R_2 I_2 \\ V_3 = R_3 I_3 \\ V_4 = R_4 I_4 \\ V_5 = -R_5 I_3 \end{cases}$$

BIPOLO 1



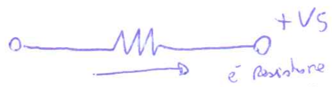
BIPOLO 2



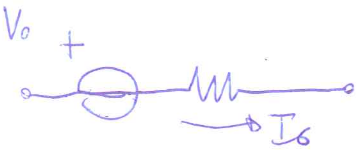
BIPOLO 3

BIPOLO 4

BIPOLO 5



è resistore ma convenzionato da generatore



$$V_6 = E_6 + R_6 I_6$$

Se si dispone dei valori dei bipoli è ora possibile creare la matrice della rete.

Il vettore dei termini noti costituito dalle forze elettromotrici.

questo sistema avrebbe 12 equazioni e 12 incognite.

Se però ricavo separatamente tensioni e correnti ho solo matrici di tensioni oppure di correnti e quindi la dimensione si riduce a 6 per 6.

METODO DI ELIMINAZIONI DELLE TENSIONE

Si ottiene sostituendo le equazioni di bipolo sulle LKC

saranno quindi solo 3 equazioni

QUARTA EQUAZIONE RIDONDANTE. NON SERVE

$$\begin{cases} R_2 I_2 - R_3 I_3 - R_5 I_5 = -E_2 \\ R_4 I_4 + R_5 I_5 - R_6 I_6 = E_6 \\ R_1 I_1 + R_3 I_3 - R_4 I_4 = E_1 \\ R_1 I_1 + R_3 I_3 + R_5 I_5 - R_6 I_6 = E_1 + E_6 \end{cases}$$

solo per esempio è una maglia che anche nella rete in modo strano NON È UN ANELLO

EQUIVALE ALLE LKT $\sum \pm R_i I_i = \sum \pm E_i$

Le equazioni originarie in cui ho sostituito erano

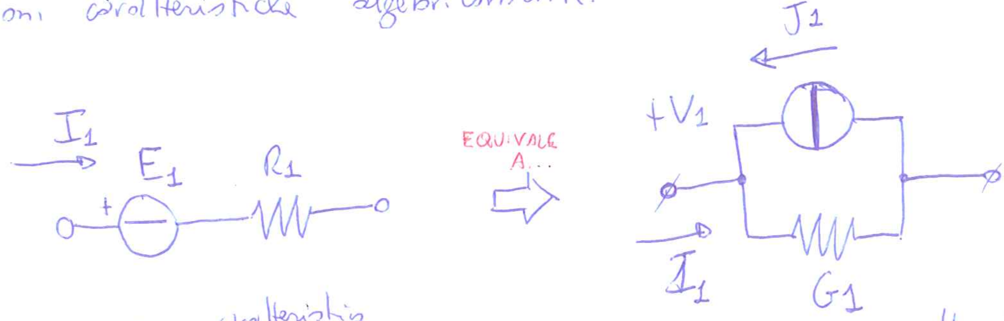
$$\begin{cases} +I_1 - I_3 - I_2 = 0 \\ +I_5 + I_2 + I_6 = 0 \\ -I_1 - I_4 - I_6 = 0 \end{cases}$$

ATTENZIONE: le equazioni LKC sono ottenute con i versore dell'insieme di taglio convenzionato entrante. se lo tengo uscente cambiano TUTTI i segni e il risultato non cambia

Se ragioniamo orientando le maglie si ottengono le stesse LKT, tenendo presente che le resistenze usualmente sono convenzionate da utilizzatori, mentre i generatori entrano nell'equazione con il segno che incontro entrando con il riferimento della maglia orientata.

TRASFORMAZIONE DEI GENERATORI (GENERATORI AFFINI) vedere il cap. 7. (METODO DI ELIMINAZIONE DELLE TENSIONI)

a volte risulta utile usare i generatori equivalenti ottenuti manipolando le equazioni caratteristiche algebricamente.



pag 177 ed. 2012

equazione caratteristica

$$V_1 = E + R_1 I_1$$

equazione caratteristica

$$\frac{V_1}{R_1} = \frac{E}{R_1} + I_1$$

$$I_1 = \frac{V_1}{R_1} - \frac{E_1}{R_1}$$

$$J_1 = -\frac{E_1}{R_1}$$

GAT
GENERATORE AFFINE DI TENSIONE

GAC
GENERATORE AFFINE DI CORRENTE

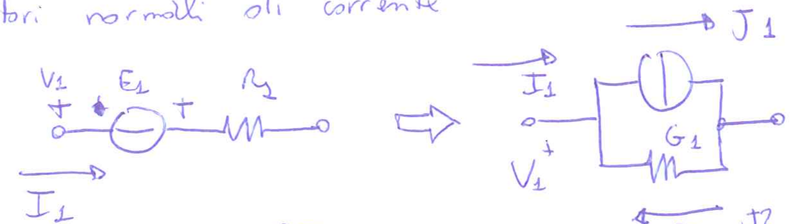
Dato che l'equazione è una retta e dato che il bipolo può essere pilotato sia in tensione che in corrente

QUESTA SITUAZIONE È MOLTO UTILE NEI TEOREMI DI THEVENIN E TEOREMI DI NORTON.

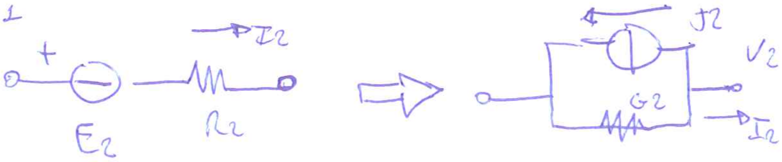
QUESTO È IL METODO DI ELIMINAZIONE DELLE TENSIONI, ESISTE IL DUALE CHE È IL METODO DI ELIMINAZIONE DELLE CORRENTI.

METODO DI ELIMINAZIONE DELLE CORRENTI

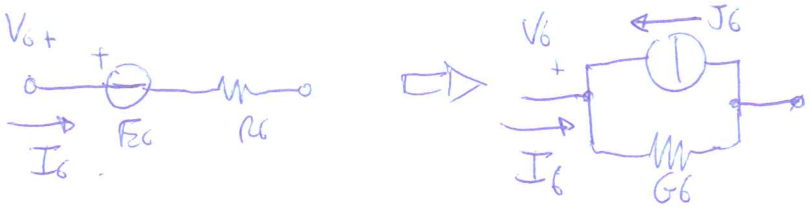
Alla rete data in origine sostituiamo i generatori normali di tensione in generatori normali di corrente



$$I_1 = J_1 + G_1 V_1 \quad \begin{cases} G_1 = \frac{1}{R_1} \\ J_1 = \frac{E_1}{R_1} \end{cases}$$



$$I_2 = -J_2 - G_2 V_2$$



$$I_6 = -J_6 + G_6 V_6$$

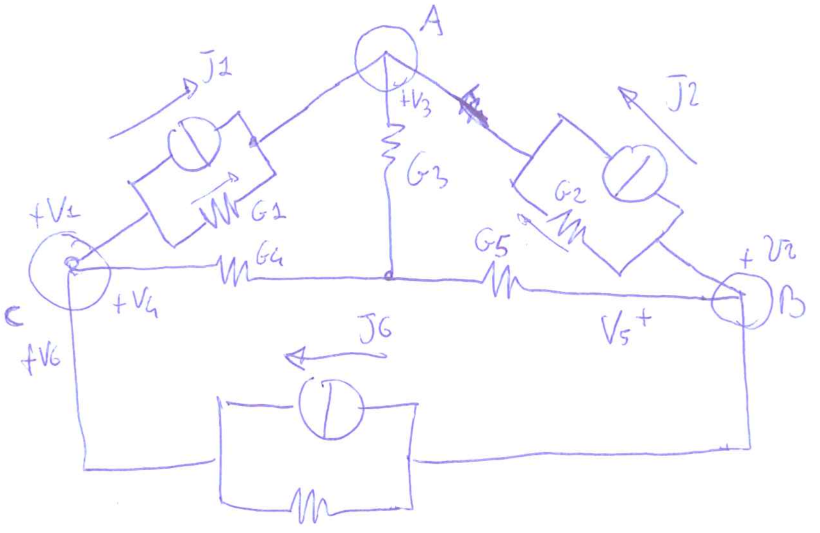
$$\begin{cases} J_6 = \frac{E_6}{R_6} \\ J_2 = \frac{E_2}{R_2} \end{cases}$$

Le equazioni trovate le mettiamo ora dentro alle LKC

$$\begin{cases} \text{nodo A} & +I_1 - I_3 - I_2 = 0 \\ \text{nodo B} & +I_5 + I_2 + I_6 = 0 \\ \text{nodo C} & -I_1 - I_4 - I_6 = 0 \end{cases}$$

$$-G_1V_1 - G_2V_2 + G_3V_3 = J_1 + J_2$$

sostituendo nella rete i generatori equivalenti si ottiene:



$$\begin{cases} -G_1V_1 - G_2V_2 + G_3V_3 = J_1 + J_2 \\ +G_2V_2 + G_5V_5 - G_6V_6 = -J_2 - J_6 \\ +G_1V_1 + G_4V_4 + G_6V_6 = -J_1 + J_6 \end{cases}$$

$$\sum \pm G_iV_i = \sum \pm J_i$$

Dato che ogni addendo GV equivale a $\frac{V}{R}$ che è una corrente, ogni equazione rappresenta direttamente la LKC al nodo.

Sono metodi di soluzione GLOBALI delle reti quei metodi che in una sola strada danno la soluzione di tutta la rete, ovvero tutte le tensioni e tutte le correnti di tutti i bipoli.

A volte ci serve tensione e corrente di un solo bipolo, usando un metodo parziale come thevenin e norton.

Ne vediamo uno adesso, valido solo su reti LINEARI, il P.S.E. principio di sovrapposizione degli effetti.

Il principio di sovrapposizione degli effetti (MAI SOVRAPPORRE LE POTENZE PERCHÉ SONO FUNZIONI QUADRATICHE E NON LINEARI, NON VALE IL PRINCIPIO)

Vale solo per le reti lineari. Di norma sono reti che contengono solo generatori normali e bipoli normali lineari.
Deriva dalla proprietà di linearità dell'algebra lineare in cui la soluzione $\underbrace{\quad}_{\text{di un sistema lineare}}$ è sempre combinazione lineare dei termini noti.

$$V_h = H_{V_{h1}} E_1 + H_{V_{h2}} E_2 + H_{R_{hs}} J_s + \dots + H_{R_{hl}} J_l$$

$$I_h = H_{G_{h1}} E_1 + H_{G_{h2}} E_2 + H_{I_{hs}} J_s + \dots + H_{I_{hl}} J_l$$

a seconda di dove il termine si trova ha significato adimensionale H, oppure una tensione V oppure una corrente J.
Il primo pedice aggiusta le "dimensioni" ovvero H_G ha dimensione siemens, H è adimensionale, H_I ha dimensione corrente, altrimenti l'equazione non torna dimensionalmente.
Il secondo pedice è un po' più complesso
Gli "H" sono detti coefficienti di Rete.

$$\boxed{H_{V_{hk}} \triangleq \left.\frac{V_h}{E_k}\right|_{\substack{E_p = 0 \quad p \neq k \\ J_q = 0 \quad \forall q}}}$$

definisce che tutti gli altri generatori sono spenti, infatti sono posti = 0.

$$H_{G_{hk}} \triangleq \left.\frac{I_q}{E_k}\right|_{\substack{E_p = 0 \quad p \neq k \\ J_q = 0 \quad \forall q}} \qquad H_{I_{hk}} \triangleq \left.\frac{I_h}{J_k}\right|_{\substack{E_p = 0 \quad \forall p \\ J_q = 0 \quad q \neq k}}$$

SI TRATTA DI FUNZIONI DI TRASFERIMENTO QUANDO AGISCE UN SOLO GENERATORE E GLI ALTRI VENGONO ANNULLATI

FARE MOLTA ATTENZIONE A NON SOVRAPPORRE MAI TENSIONI PERCHÉ NON FUNZIONA IL PRINCIPIO DI SOVRAPPOSIZIONE.

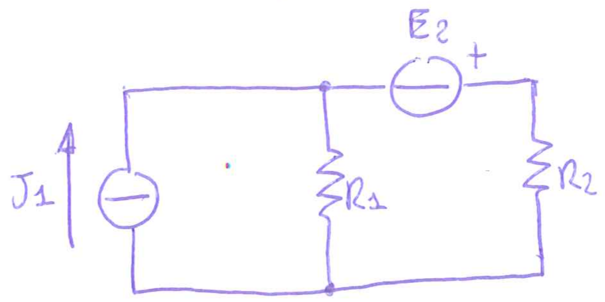
$$P_h = R I_h^2 = R\left(I_h' + I_h''\right)^2$$ CORRETTO.

$$P_h = R I_q'^2 + R I_q''^2$$ NO SBAGLIATO

DI FATTI: $$\boxed{R I_q'^2 + R'_q{}^2 \neq R\left(I_h' + I_h''\right)}$$

16 MARZO 2012 lez. n° 8

Esempio di soluzione di rete con il P.S.E., usiamo l'esempio presente sul testo di Guarnieri ed. 2012.



$J_1 = 12A$

$E_2 = 72V$

$R_1 = 20\Omega$

$R_2 = 40\Omega$

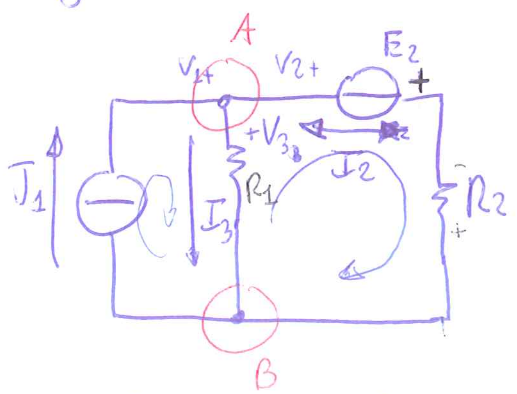
Si applicherà anche il bilancio delle potenze secondo thellegen e altri metodi tra cui eliminazione delle correnti e delle tensione

Quanti nodi ci sono? $n=2$

Quanti lati ci sono? $l=3$

ne consegue $m = 2$

$$\begin{cases} n=2 & \text{sono A e B} \\ l=3 \\ m=2 \end{cases}$$



Equazioni TOPOLOGICHE

corrisponderà a J1 infatti $I_1 = J_1$

LKC $I_1 + I_2 - I_3 = 0$ con il verso entrante.

LKT
$$\begin{cases} \text{maglia DX} & +V_2 - V_3 = 0 \\ \text{maglia SX} & -V_1 + V_3 = 0 \end{cases}$$

vediamo le equazioni TIPOLOGICHE.

sul bipolo R_1 si può scrivere $V_3 = R_3 I_3$

sul bipolo R_2 si ha invece $V_2 = -E_2 - R_2 I_2$

Scriviamo la matrice di $2l \times 2l$ coefficienti

Le equazioni topologiche hanno solo coefficienti 0 e 1.

$$
\begin{array}{c}
LKC \\ LKT \\ LKT \\ 1 \\ 2 \\ 3
\end{array}
\begin{bmatrix}
1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\
0 & 0 & 0 & -1 & 0 & +1 \\
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & -R_1 & 0 & 0 & 1 \\
0 & R_2 & 0 & 0 & 1 & 0
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix}
I_1 \\ I_2 \\ I_3 \\ V_1 \\ V_2 \\ V_3
\end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix}
0 \\ 0 \\ 0 \\ J_1 \\ 0 \\ -E_2
\end{bmatrix}
$$

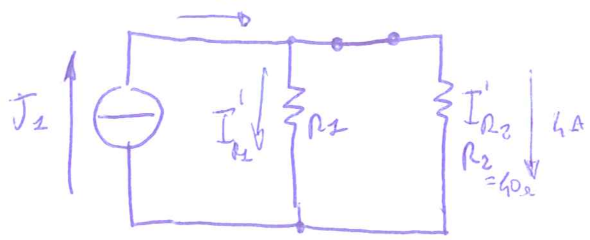
matrice dei termini noti

equazione Tipologiche

$$
\begin{bmatrix}
1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\
0 & 0 & 0 & -1 & 0 & +1 \\
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 20\Omega & 0 & 0 & 1 \\
0 & 40 & 0 & 0 & 1 & 0
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix}
I_1 \\ I_2 \\ I_3 \\ V_1 \\ V_2 \\ V_3
\end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix}
0 \\ 0 \\ 0 \\ 12 \\ 0 \\ -72
\end{bmatrix}
$$

$$
\begin{array}{c}
\cdot -40 \\ \\ \\ \cdot 40 \\ \\ \\
\end{array}
\begin{bmatrix}
-40 & -40 & +40 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\
0 & 0 & 0 & -1 & 0 & +1 \\
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 20 & 0 & 0 & 1 \\
0 & 40 & 0 & 0 & 1 & 0
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix}
-40 I_1 \\ I_2 \\ I_3 \\ V_1 \\ V_2 \\ V_3
\end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix}
0 \\ 0 \\ 0 \\ 12 \\ 0 \\ -72
\end{bmatrix}
$$

$$\begin{cases} V_h = H_{vh1} E_1 + \dots + H_{vh2} E_2 + H_{Rh2} J_n \dots + H_{Rhl} J_l \\ I_h = H_{Gh1} E_1 + \dots + H_{Gh2} E_2 + H_{Ihn} J_n + \dots + H_{Ghl} J_l \end{cases}$$



PARTITORE DI CORRENTE

$$I'_{R2} = \frac{J_1}{R_2 + R_2} \cdot R_1 = \frac{12}{20+40} \cdot 20 = 4\,A$$

$$I'_{R1} = \frac{J_1}{R_1 + R_2} \cdot R_2 = \frac{12}{20+40} \cdot 40 = 8\,A$$

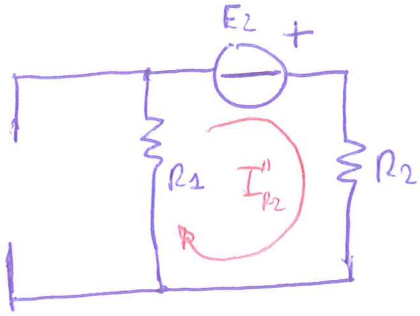
INFATTI

$$\begin{cases} V'_{R1} = I'_{R1} \cdot R_1 = 8A \cdot 20\Omega = 160V \qquad J = 4 + 8 = 12\,A \\ V'_{R2} = I'_{R2} \cdot R_2 = 4 \cdot 40\Omega = 160V \end{cases}$$

$\Rightarrow$ corrisponde a $V'_{R2} = R_2 I'_{R2} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} \cdot J_1$

devono essere uguali dato che sono in parallelo

vediamo il secondo generatore che agisce da solo



ORIENTIAMO LA MAGLIA E SCRIVIAMO LA LKT

$$I''_{R2} \cdot R_2 + I''_{R1} \cdot R_1 - E_2 = 0$$

$$I''_{R2}(R_2 + R_1) = E_2$$

$$I''_{R2} = \frac{E_2}{R_2 + R_1} = \frac{72}{60} = 1{,}2\,A$$

NOTARE CHE IN QUESTE CONDIZIONI SI HA $I''_{R2} = I''_{R1}$

$$V^*_{R2} = V'_{R2} + V''_{R2} = 160V + I''_{R2} \cdot R_2 = 160V \pm \underbrace{1{,}2 \cdot 40}_{V''_{R2} = 48V} = 208\,V \text{ ok}$$

$$V_{R1} = V'_{R1} + V''_{R1} = 160V + I''_{R1} \cdot R_1 = 160V + 1{,}2 \cdot 20 = 184\,V$$

Facciamo una piccola prova. Nella maglia di destra deve valere

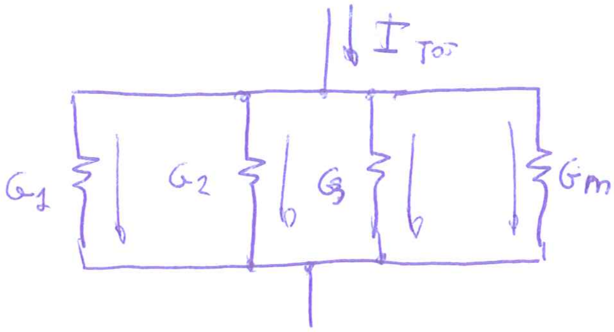
$V_{R1} - E_2 = V_{R2}$ sostituendo i valori $\underbrace{184}_{V_{R1}} - 72 =$

$$I_{R2} = I_{R2}' + I_{R2}'' = 4A + 1,2A = 5,2A \text{ ok}$$

$$I_{R1} = I_{R1}' + I_{R2}'' = 8A + 1,2A \quad 9,2A$$

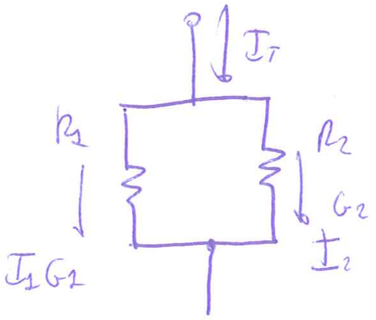
$$V_{AB} = I_{R1} \cdot R_1 = 9,2 \cdot 20 = 184 \text{ volt}$$

Vediamo il partitore in termini di conduttanza



$$I_i = \frac{G_2'}{\sum_{1=1}^{n} G_1} I^{\circ}$$

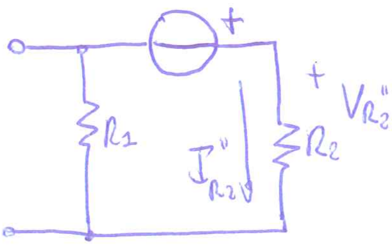
Su due resistenze vale:



$$I_1 = \frac{G_1}{G_1 + G_2} \cdot I_{TOT} = \frac{R_2}{R_1 + R_2} \cdot I_1$$

$$I_2 = \frac{G_2}{G_1 + G_2} I_{Tot} = \frac{R_1 I_{TOT}}{R_1 + R_2}$$

RIVEDIAMO IL SOLO EFFETTO DEL GENERATORE DI TENSIONE



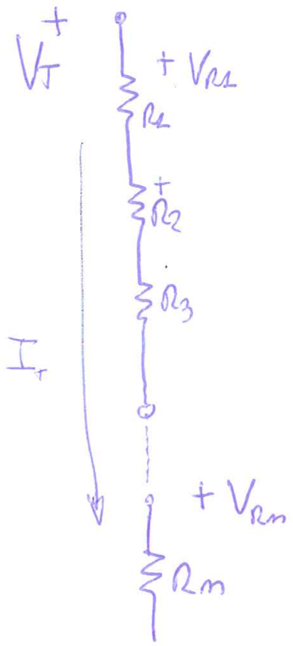
(dalla eq. di maglia)

$$I_{R2}'' = \frac{E_2}{R_1 + R_2} = 1,2A$$

qui si identifica un partitore di tensione

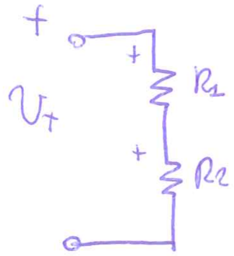
abbreviamo in pdT o PDV

PARTITORE DI TENSIONE (Duale del partitore di corrente)



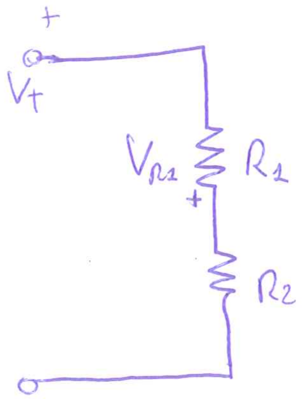
$$\boxed{V_{Ri} = \frac{R_i}{\sum_{j=1}^{n} R_j} \cdot V_T}$$

Vediamo il caso particolare in cui vi siano solo due resistori in serie.



$$V_{R1} = \frac{R_1}{R_1+R_2} V_T$$

$$V_{R2} = \frac{R_2}{R_1+R_2} V_T$$



$$V_{R1} = -\frac{R_1}{R_1+R_2} V_T$$

nell'esercizio della sovrapposizione degli effetti il riferimento della tensione sarà invertito nella resistenza centrale a causa della I''_{R1} entrante dal sotto

$H_{G_{4,2}}$

$$I''_{R2} = \frac{E_2}{R_1+R_2} = \frac{72}{60} = 1{,}2\ A = \frac{1}{R_1+R_2} E_2$$

$$V_{R2} = V'_{R2} + V''_{R2} = H_{R_{4,1}} J_1 + HV_{4,2} E_2 = 160 + 48 = 208V$$

$$I_{R2} = I'_{R2} + I''_{R2} = H_{I_{4,1}} J_1 + H_{G_{4,2}} E_2 = 5{,}2\ A$$

ATTENZIONE LA POTENZA SI CALCOLA SUI VALORI ORA TROVATI

$$P_{R2} = V_{R2} I_{R22} \; R_2 I_{R2}^2 = 1081,6 \text{ WATT}$$

MAI SOVRAPPORRE LE POTENZE DATO CHE NON SONO GRANDEZZE LINEARI

MET
(METODO ELIMINAZIONE DELLE TENSIONI)

l equazioni nelle incognite I

MEC
(METODO DI ELIMINAZIONE DELLE CORRENTI)

l equazioni nelle incognite V

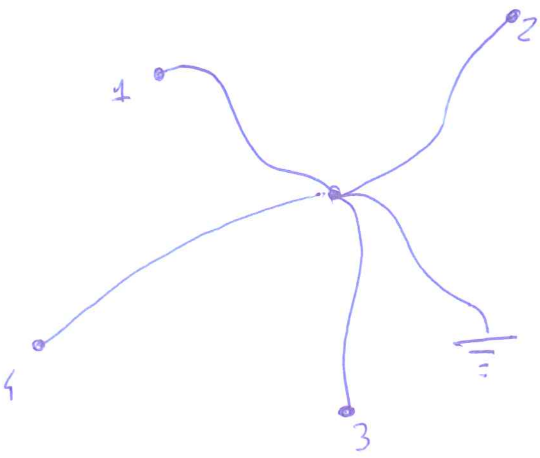
Si ricorda che però nelle tensioni si possono scrivere solo n equazioni indipendenti

METODO DEI POTENZIALI AI NODI

Vediamo se riusciamo a scrivere un numero di equazioni pari a $n-1$ incognite

le variabili da utilizzare in un sistema di $n-1$ equazioni possono essere le equazioni nelle tensioni di nodo, in cui ne ponto uno al potenziale di terra e gli altri li riferisco a questo potenziale di terra.

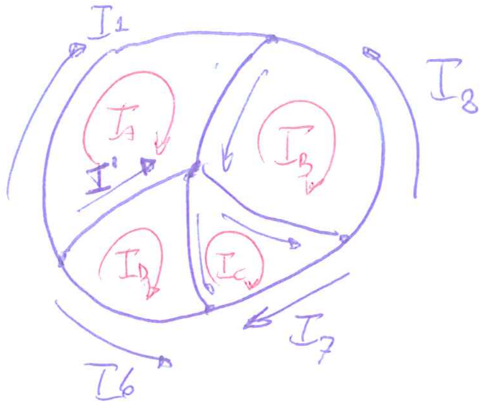
U_1 sono i potenziali degli $n-1$ nodi avendo posto il potenziale del nodo U_n alla terra (potenziale zero)
serve a ridurre il sistema a un numero minore di gradi di libertà



$$V_{1n} - U_1 - U_n$$

$$V_{12} = U_1 - U_2$$

cerchiamo le variabili da associare al numero degli anelli della rete, queste sono naturalmente le correnti di anello e da queste posso ricavare le correnti di lato.



$m = 4$

$I_1 = i_A$ sul lato

$I_2 = i_A - i_B$ sugli anelli

quindi le tensioni nodali e le correnti di anello sono assimilabili a delle variabili fittizie che ci permetteranno di ricavare le variabili tensioni di nodo e correnti di lato.

Le m variabili indipendenti risultano essere correnti di anello delle onde correnti cicliche, che percorrono tutti i lati dell'insieme prescelto costituente l'anello.
Dato che questa corrente si richiude su se stessa, percorrendo l'anello, sarà di tipo solenoidale per definizione.
Per individuare le correnti degli anelli è fondamentale aver fissato i riferimenti, ovvero il verso di percorrenza degli anelli come indicato nel grafo soprastante. In questa maniera esiste sempre un lato in cui le correnti degli anelli risultano discordi e quindi la corrente del lato dipendente è espressa per differenza, ad esempio $I' = I_B - I_A$

Le equazioni delle correnti di anello avranno comunque una dipendenza dal tempo

$$i_h(t) = i_{Ar}(t) \; i_{As}(t)$$

sui due anelli A_r e A_s sul lato h-esimo

e si potranno esprimere in maniera compatta con le sommatorie delle tensioni in cui compaiono le m-correnti $R_m I_m$ poste uguali alle tensioni impresse che sono il termine noto

$$\sum_h R_h I_h = \sum_h E_h$$

per ogni h-esimo lato o maglia.

Per ogni bipolo resistore si ha quindi $R_h I_h = R_h (I_{Ar} - J_{As})$

considerando le m maglie si ottiene un sistema di m equazioni in m incognite che sono appunto le correnti

$$\begin{cases} R_{A11} J_{A1} - \sum_{r=2}^{m} R_{A1r} J_{Ar} = E_{A1} \\ R_{A2} J_{A2} - \sum_{\substack{r=1 \\ r \neq 2}}^{m} R_{A2r} J_{Ar} = E_{A2} \\ \vdots \\ R_{A_{mm}} I_{A_{mm}} - \sum_{r=1}^{m-1} R_{A_{mr}} I_{Ar} = E_{Am} \end{cases}$$

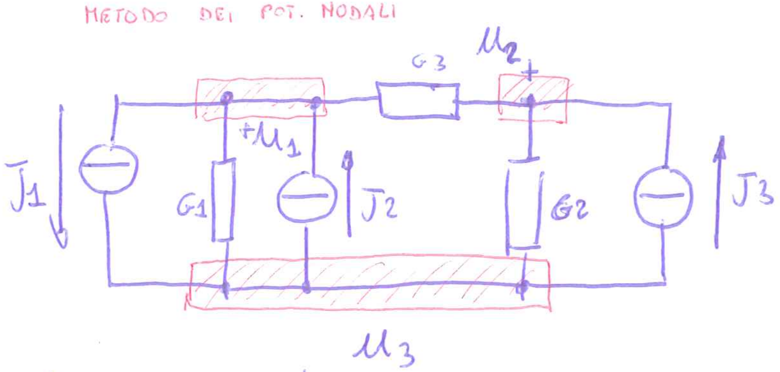
 IMPORTANTE!: CALCOLARE LE POTENZE NELLE RETI ORIGINALI NON ADEGUATE

Riassumiamo quali sono gli elementi in gioco nei due metodi dei potenziali nodali e delle correnti di anello

LKC	LKT
l - tensioni	l - correnti
$n-1$ gradi di libertà	m gradi di libertà
u_n potenziali nodali	i_m correnti di anello
Corrisponde a $n-1$ perché un nodo viene meno a terra	
Pot. di nodi	correnti di maglia

Vediamo di applicare il metodo dei potenziali nodali e successivamente quello delle correnti di anello.

METODO DEI POT. NODALI



Le zone rosse equipotenziali rappresentano i nodi.

1) ADEGUARE LA RETE AL METODO (ovvero fare in modo che vi siano presenti solo i generatori normali di corrente) in questo caso la rete è già adeguata.

2) Le LKT risultano automaticamente soddisfatte, le LKC saranno scritte in termini dei potenziali nodali, avendo posto il potenziale di un nodo a massa (ovvero zero volt).

Cominciamo verificando se LKT sono soddisfatte, dato che abbiamo la rete già adeguata.

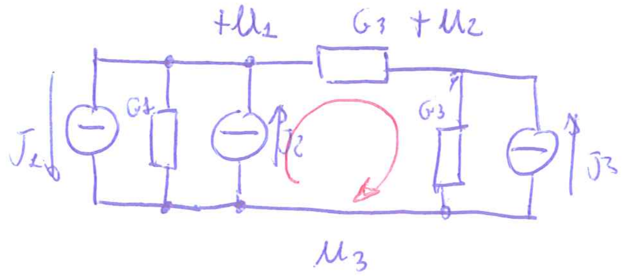
La V_1 è ai capi del lato 1, la tensione V_2 è ai capi del lato 2 e la V_3 è la tensione ai capi di V_3, ma vale quindi anche

$$\begin{cases} V_1 = u_1 - u_3 \\ V_2 = u_2 - u_3 \\ V_3 = u_2 - u_1 \end{cases}$$

dato che u_3 vale zero

Applichiamo Kirchhoff "LKT"

$$-V_1 - V_3 + V_2 = 0$$



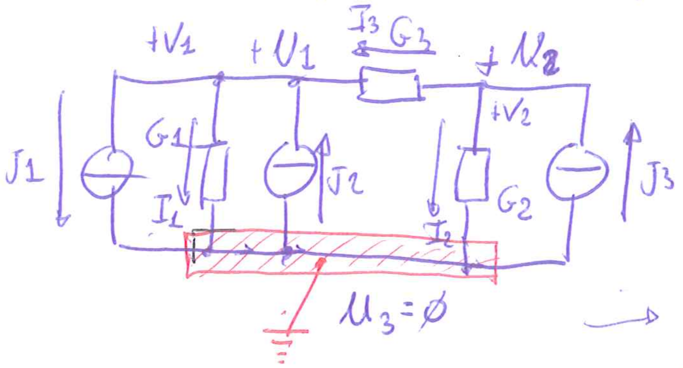
$$-(u_1-u_3)-(u_2-u_1)+(u_2-u_3)=0$$

$$-\cancel{u_1}+\cancel{u_3}-\cancel{u_2}+\cancel{u_1}+\cancel{u_2}-\cancel{u_3}=0$$

quindi queste equazioni sono valide ma inutili, dato che sono sempre e automaticamente soddisfatte.

Allora procediamo verificando le LKC

Forziamo a massa il nodo del potenziale u_3 (prendiamo u_3 come riferimento per le tensioni)



LKC

① $-I_1+I_3-J_1+J_2=0$

② $-I_2-I_3+J_3=0$

$$\begin{cases} I_1 - I_3 = -J_1 + J_2 \\ I_2 + I_3 = J_3 \end{cases}$$

$(-G_3(u_2-u_1))$

$G_1 u_1 - I_3 + \cancel{\ldots}$

$$\begin{cases} G_1 u_1 - G_3(u_2-u_1) = -J_1+J_2 \\ G_2 u_2 + G_3(u_2-u_1) = J_3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (G_1+G_3)u_1 - G_3 u_2 = -J_1+J_2 \\ (G_2+G_3)u_2 - G_3 u_1 = J_3 \end{cases}$$

questo secondo sistema è quello finale da usare negli esercizi.

In effetti risulta possibile scrivere solo n-1 equazioni ai potenziali ai nodi

Si calcola il potenziale al nodo in esame come sommatoria delle conduttanze per il potenziale u_n bisogna togliere (sottraendo) la conduttanza per il potenziale di ogni altro nodo, uguagliando alla somma algebrica delle correnti in quel nodo.

Andare a visitare il sito americano <u>Circuit Lab</u> e provare a fare qualche esercizio. ci si accorge che sono tutti basati su questo metodo perché viene chiesto quale nodo va a massa.

FINE SPIEGAZIONE

Vediamo degli esempi

La rete potrebbe non essere adeguata e quindi la dobbiamo adeguare facendo comparire solo generatori ideali di corrente.

<u>Ci sono tre casi particolari</u>

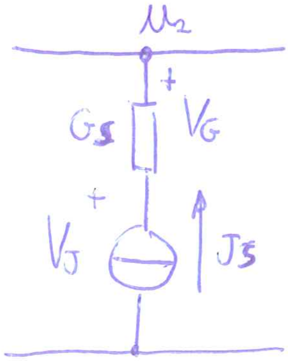
1) Generatore di corrente in serie a una ~~resistenza~~ conduttanza.

2) Generatore di tensione in serie ad una conduttanza

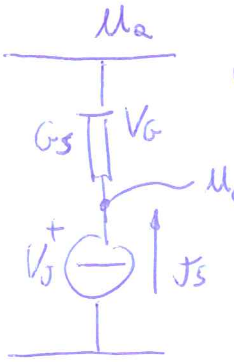
3) Generatore di tensione connesso tra due nodi

<u>PRIMO CASO</u> generatore di corrente in serie a una conduttanza

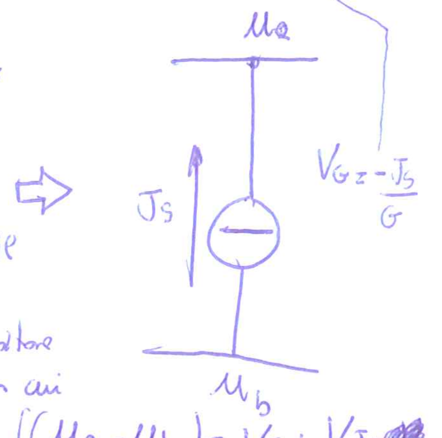
manca il meno nelle slide del prof.



aggiungere un nodo fittizio e porlo a potenziale u_c



MA SI AGGIUNGE UNA EQUAZIONE QUINDI NON CONVIENE, PIUTTOSTO SOSTITUISCO il tutto con un unico generatore di corrente in cui cambia però

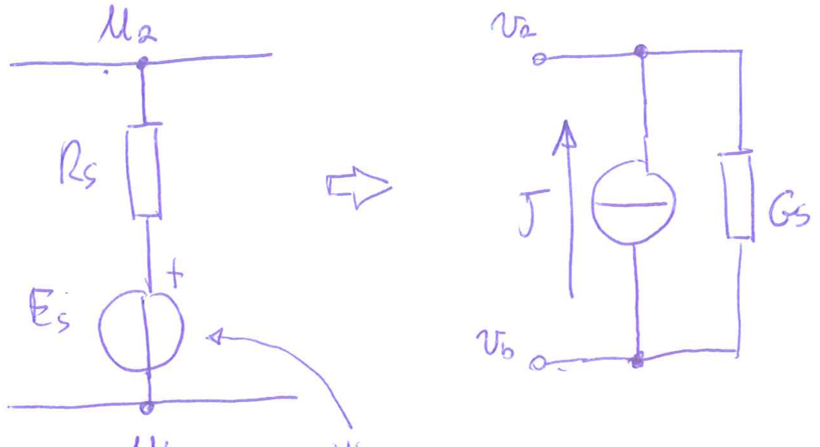


con $\begin{cases} (u_a - u_b) = V_G + V_J \\ V_G = -\frac{J_S}{G} \end{cases}$

si ottiene quindi $V_J = u_a - u_b - V_G$

$$= u_a - u_b + \frac{J_S}{G}$$

SECONDO CASO — GENERATORE DI TENSIONE IN SERIE A UNA CONDUTTANZA



si può sostituire per affinità dei generatori

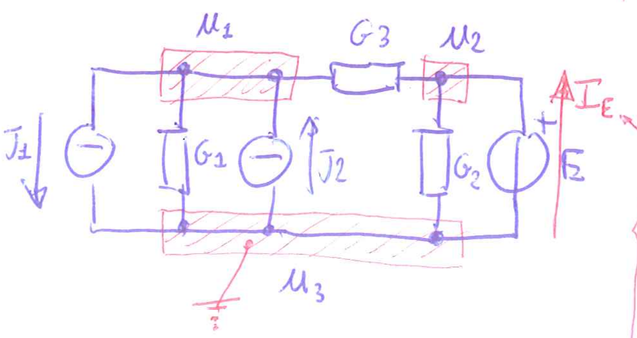
$$\begin{cases} G_S = \dfrac{1}{R_S} \\ J = \dfrac{E}{R_S} \end{cases}$$

attenzione che la potenza in questo generatore non è la stessa di capi di quella di corrente. Le potenze non vanno calcolate sui lati adeguati

$u_a, u_b \rightarrow u_a - u_b = E_S - R_S I$

$$I = \frac{E_S - u_a + u_b}{R_S}$$

TERZO CASO — generatore di ~~tensione~~ connesso tra due nodi (TENSIONE)



CI SI INVENTA UNA VARIABILE AUSILIARIA FACENDO FINTA CHE IL GENERATORE DI TENSIONE REALE SIA INVECE UN GENERATORE DI CORRENTE REALE CHE VALE I_E

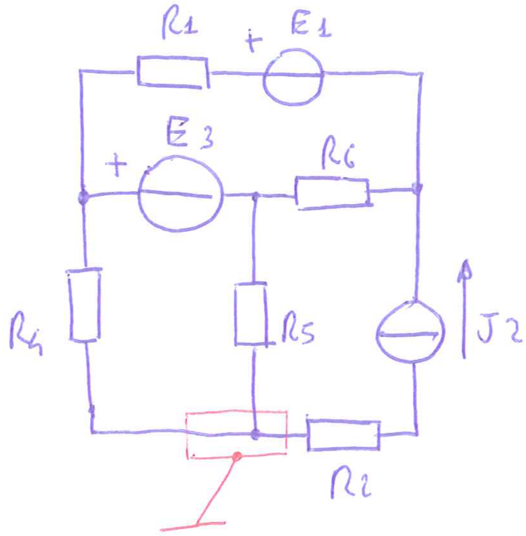
$$\begin{cases} (G_1 + G_3)u_1 - G_3 u_2 = J_2 - J_1 \\ (G_1 + G_3)u_2 - G_3 u_1 = I_E \\ u_2 = E \\ \text{+ eq. AUSILIARIA} \\ u_2 - u_1 = E \end{cases}$$

si trovano 2 equazioni e 3 incognite, ma si aggiunge un vincolo di un nuovo potenziale nodale, si origina l'equazione AUSILIARIA che mi ribilancia il sistema

La sommatoria delle correnti entranti (termini noti) si prendono con segno POSITIVO le entranti (e negativo le uscenti).

$$\sum_{i=1}^{m} \pm J_i$$

Vediamo un esempio pratico $\Rightarrow$ Determinare la potenza messa in gioco da E_1 e J_2



$J_2 = 3A$

$E_3 = 3V \quad E_1 = 4V$

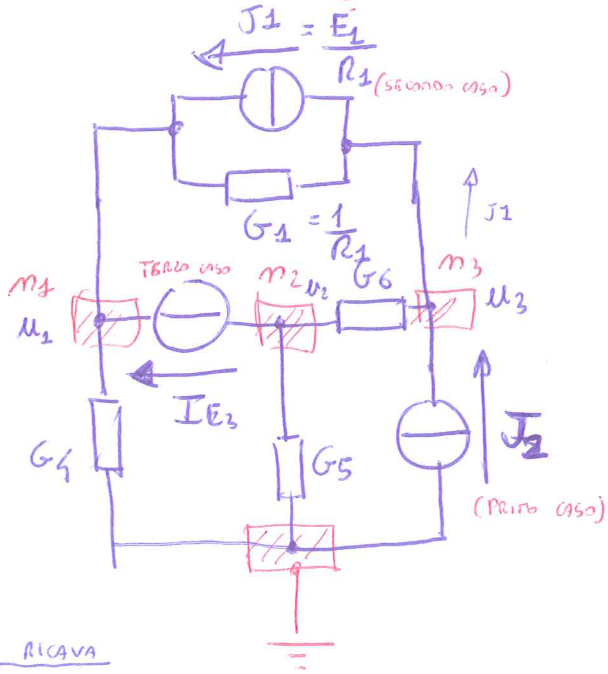
$R_1 = 2\,\Omega$

$R_2 = 3\,\Omega$

$R_4 = 3\,\Omega$

$R_5 = 1\,\Omega$

$R_6 = 3\,\Omega$



$G_1 = \frac{1}{R_1} = 0{,}5\,[S]$

$G_4 = \frac{1}{R_4} = 0{,}33\,[S]$

$G_5 = \frac{1}{R_5} = 1\,[S]$

VALORI CALCOLATI CON CONSIDERAZIONI SUI TRE CASI PIU LEGGI ELEMENTARI

$$\boxed{J_1 = \frac{E_1}{R_1} = \frac{4}{2} = 2\,A \qquad V_{J2} = u_3 + J_2 R_2}$$

Qui è scritto +G1 ma era già stato preso

POSITIVE ENTRANTI

$$\begin{cases} (G_1 + G_4)\, u_1 - G_1 u_3 - \quad = +J_2 + I_{E_3} \\ (G_6 + G_5)\, u_2 - G_6 u_3 = -I_{E_3} \\ (G_6 + G_1)\, u_3 - G_6 u_2 - G_1 u_1 = J_2 - J_1 \\ u_1 - u_2 = E_3 \end{cases}$$

equazione ausiliaria

Si ricava

$$\boxed{I_{E_1} = \frac{u_3 - u_1 + E_1}{R_1}}$$

$$\begin{cases} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) \cdot u_1 - \left(\frac{1}{2}\right) u_3 = 3 + I_{E_3} \\ \left(\frac{1}{3} + 1\right) \cdot u_2 - \frac{1}{3} u_3 = -I_{E_3} \\ \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{2}\right) u_3 - \frac{1}{3} u_2 - \frac{1}{2} u_1 = (3 - 2) \end{cases}$$

$u_3 = V_{J2} - R_2 J$

$V_{J2} = u_3 + R_2 J_2$

$V_{J2} = u_3 + J_2 R_2$