

L'operatore nabla

Questa dispensa raccoglie l'informazione basilare sull'operatore *nabla* e sulle sue applicazioni che concernono il programma di Esperimentazioni II. La trattazione ha una natura soprattutto pratica, senza alcuna pretesa di rigore matematico.

1. Campi scalari e vettoriali

Supponiamo di avere una grandezza fisica scalare s che è definita nei punti di una zona di spazio. La funzione

$$s(x, y, z, t) \quad (1.1)$$

che definisce il valore della grandezza fisica nei vari punti costituisce un *campo scalare*. Se invece abbiamo una grandezza fisica vettoriale $\mathbf{w}$ definita nello spazio avremo un campo vettoriale

$$\mathbf{w}(x, y, z, t) = w_x(x, y, z, t) \mathbf{i} + w_y(x, y, z, t) \mathbf{j} + w_z(x, y, z, t) \mathbf{k} \quad (1.2)$$

Qualora non esista una dipendenza esplicita dal tempo i campi si dicono *posizionali*. Nel seguito supporremo che le funzioni s e $\mathbf{w}$ soddisfino a condizioni di continuità ed esistenza delle derivate tali da permettere il calcolo delle varie espressioni di cui ci occuperemo. Il fatto stesso che si tratti di grandezze fisiche del resto impone delle limitazioni alle possibili discontinuità.

2. L'operatore nabla

Alcuni concetti e grandezze della fisica, in particolare in elettrologia, sono legati alle derivate spaziali di campi scalari e vettoriali. Queste operazioni si prestano ad essere rappresentate convenientemente per mezzo dell'operatore vettoriale nabla

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial z} \mathbf{k} \quad (2.1)$$

L'operatore nabla può essere applicato a funzioni della posizione (campi) sia scalari che vettoriali e si può dimostrare che nel calcolo dei risultati è lecito considerarlo come un normale vettore e applicare le regole usuali dell'algebra vettoriale.

I modi basilari di applicare l'operatore nabla sono 3. Il primo è

$$\nabla s = \frac{\partial s}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial s}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial s}{\partial z} \mathbf{k} = \text{grad } s \quad (2.2)$$

detto *gradiente*. L'operatore nabla viene applicato direttamente a uno scalare e produce una grandezza vettoriale. Abbiamo poi

$$\nabla \cdot \mathbf{w} = \frac{\partial w_x}{\partial x} + \frac{\partial w_y}{\partial y} + \frac{\partial w_z}{\partial z} = \text{div } \mathbf{w} \quad (2.3)$$

ossia l'operatore *divergenza*. In questo caso nabla opera tramite il prodotto scalare su una grandezza vettoriale e produce un risultato scalare. Infine

$$\nabla \wedge \mathbf{w} = \text{rot } \mathbf{w} \quad (2.4)$$

ossia l'operatore *rotore*. Qui nabla opera tramite il prodotto vettoriale su una grandezza vettoriale producendo un risultato pure vettoriale. Il calcolo esplicito può essere eseguito tramite la risoluzione del determinante simbolico

$$\nabla \wedge \mathbf{w} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ w_x & w_y & w_z \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial w_z}{\partial y} - \frac{\partial w_y}{\partial z} \right) \mathbf{i} + \left(\frac{\partial w_x}{\partial z} - \frac{\partial w_z}{\partial x} \right) \mathbf{j} + \left(\frac{\partial w_y}{\partial x} - \frac{\partial w_x}{\partial y} \right) \mathbf{k} \quad (2.5)$$

3. L'operatore gradiente

L'operatore gradiente si ottiene facendo operare nabla su un campo scalare e produce un campo vettoriale: $\nabla s = \mathbf{w}$. Ad esso sono associate alcune proprietà

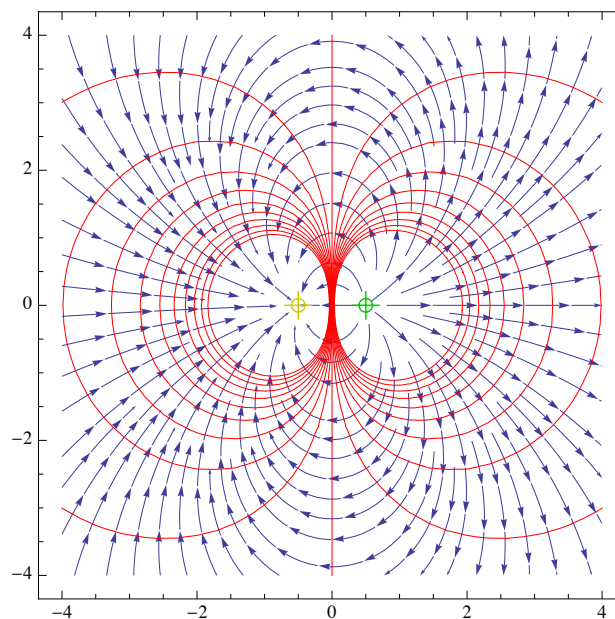
- Se per una coppia di campi vale la relazione $\nabla s = \mathbf{w}$, la stessa relazione vale per qualsiasi altro campo scalare $s'(x, y, z) = s(x, y, z) + c$, dove c è una costante.
- In ogni punto la direzione del gradiente corrisponde a quella in cui il campo scalare cresce più velocemente. Supponiamo infatti di essere nel punto (x, y, z) e di effettuare

uno spostamento infinitesimo nello spazio $d\mathbf{P} = da\mathbf{i} + db\mathbf{j} + dc\mathbf{k}$. Potremo scrivere

$$s(x+da, y+db, z+dc) = s(x, y, z) + \frac{\partial s}{\partial x} da + \frac{\partial s}{\partial y} db + \frac{\partial s}{\partial z} dc = s(x, y, z) + \nabla s \cdot d\mathbf{P} \quad (3.1)$$

Dalla (3.1) si vede immediatamente che, a parità di $|d\mathbf{P}|$, la variazione massima si ha quando ∇s e $d\mathbf{P}$ hanno la stessa direzione; si ha la massima crescita quando i versi sono concordi.

- c. Un campo posizionale s per cui $\nabla s = \mathbf{w}$ viene comunemente chiamato *potenziale (scalare)* del campo vettoriale $\mathbf{w}$. Le superfici nello spazio per cui risulta $s(x, y, z) = k$ costante si chiamano *superfici equipotenziali*. Allo stesso tempo possiamo definire nello spazio delle linee orientate che sono tangenti in ogni punto alla direzione di $\mathbf{w}$ e si chiamano *linee di forza*. Si vede facilmente dalla (3.1) che le linee di forza sono in ogni punto perpendicolari alle superfici equipotenziali. Infatti la superficie equipotenziale passante per (x, y, z) conterrà i punti per cui $s(x+da, y+db, z+dc) = s(x, y, z)$. Questo implica che deve essere $\mathbf{w} \cdot d\mathbf{P} = 0$. Quindi la superficie equipotenziale contiene tutti i vettori perpendicolari a $\mathbf{w}$, per cui è essa stessa perpendicolare a $\mathbf{w}$, e quindi alle sue linee di forza.



L'immagine mostra le linee di forza del campo elettrostatico (in blu, con il verso evidenziato dalle frecce) e le tracce nel piano delle superfici equipotenziali (in rosso) nel caso di due cariche elettriche di ugual valore e segno opposto disposte a una distanza unitaria nella scala del grafico. La posizione delle cariche è segnata da un crocifilo verde per la positiva e giallo per la negativa.

La proprietà a. implica che per un dato campo vettoriale conservativo esistono infiniti

potenziali che differiscono per una costante. Questo non crea problemi perché tutte le quantità di interesse pratico (nel nostro caso, fisico) non dipendono dal valore di s ma dalle differenze che il potenziale assume fra un punto e un altro.

- d. Un campo vettoriale $\mathbf{w}$ che sia gradiente di un potenziale scalare si dice *conservativo* e per esso, se $\mathbf{A} = (x_a, y_a, z_a)$ e $\mathbf{B} = (x_b, y_b, z_b)$ sono due punti qualsiasi nello spazio e Γ è una qualsiasi curva che li unisce vale la proprietà

$$\int_{\mathbf{A} \Gamma \mathbf{B}} \mathbf{w} \cdot d\mathbf{l} = s(\mathbf{B}) - s(\mathbf{A}) \quad (3.2)$$

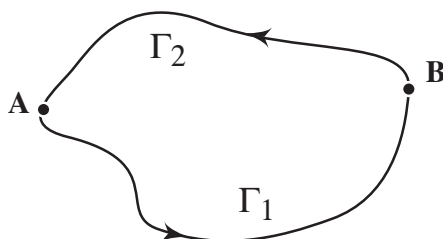
Dove con $s(\mathbf{A})$ e $s(\mathbf{B})$ si intende il potenziale scalare calcolato nei rispettivi punti. L'integrale di linea quindi non dipende dalla particolare traiettoria seguita ma solo dalle posizioni degli estremi. Infatti

$$\begin{aligned} \int_{\mathbf{A} \Gamma \mathbf{B}} \mathbf{w} \cdot d\mathbf{l} &= \int_{\mathbf{A} \Gamma \mathbf{B}} (\nabla s) \cdot d\mathbf{l} = \int_{\mathbf{A} \Gamma \mathbf{B}} (\nabla s) \cdot d\mathbf{l} = \\ &= \int_{\mathbf{A} \Gamma \mathbf{B}} \frac{\partial s}{\partial x} dx + \frac{\partial s}{\partial y} dy + \frac{\partial s}{\partial z} dz = \int_{\mathbf{A}}^{\mathbf{B}} ds = s(\mathbf{B}) - s(\mathbf{A}) \end{aligned} \quad (3.3)$$

Dove nel penultimo passaggio i limiti dell'integrale passa da un integrale di linea alla semplice somma delle variazioni di s e quindi non dipende più dalla curva Γ . Dalla (3.2) discende anche la doppia implicazione

$$\oint_{\Gamma} \mathbf{w} \cdot d\mathbf{l} = 0 \quad \forall \Gamma \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{w} = \nabla s \quad (3.4)$$

dove l'integrale su una curva chiusa è detto *circuitazione* del campo. Abbiamo praticamente già dimostrato l'implicazione da destra a sinistra, perché se il campo vettoriale è gradiente di un potenziale scalare il suo integrale di linea non dipende dal cammino e vale la (3.2).



Ma allora su ogni linea chiusa Γ possiamo individuare arbitrariamente due punti $\mathbf{A}$ e

B non coincidenti che spezzano il percorso in un tratto Γ_1 e un tratto Γ_2 per cui

$$\begin{aligned} 0 &= \oint_{\Gamma} \mathbf{w} \cdot d\mathbf{l} = \int_{\mathbf{A}\Gamma_1\mathbf{B}} \mathbf{w} \cdot d\mathbf{l} + \int_{\mathbf{B}\Gamma_2\mathbf{A}} \mathbf{w} \cdot d\mathbf{l} = \\ &= \int_{\mathbf{A}\Gamma_1\mathbf{B}} \mathbf{w} \cdot d\mathbf{l} - \int_{\mathbf{A}\Gamma_2\mathbf{B}} \mathbf{w} \cdot d\mathbf{l} \Rightarrow \int_{\mathbf{A}\Gamma_1\mathbf{B}} \mathbf{w} \cdot d\mathbf{l} = \int_{\mathbf{A}\Gamma_2\mathbf{B}} \mathbf{w} \cdot d\mathbf{l} \end{aligned} \quad (3.5)$$

Se assumiamo verificata la proprietà a sinistra della (3.4), consideriamo due traiettorie diverse qualsiasi Γ_1 e Γ_2 che vanno da un punto **A** a un punto **B** e la traiettoria chiusa Γ che corrisponde a $\mathbf{A}\Gamma_1\mathbf{B}\Gamma_2\mathbf{A}$, gli stessi passaggi della (3.5) dimostrano che l'integrale di linea è uguale per le due traiettorie. Ma essendo queste arbitrarie, esso è uguale per qualsiasi traiettoria con gli stessi estremi e quindi può dipendere solo dalla posizione dei punti iniziali e finali; esiste allora un potenziale scalare $s(x, y, z)$ tale che l'integrale può essere posto nella forma (3.2). Resta da dimostrare che se per $\mathbf{w}$ vale la (3.2) allora $\mathbf{w} = \nabla s$. Consideriamo un punto **A** e uno spostamento arbitrario infinitesimo $d\mathbf{A} = da_x \mathbf{i} + da_y \mathbf{j} + da_z \mathbf{k}$ a partire da **A**. Avremo

$$\int_{\mathbf{A}}^{\mathbf{A}+d\mathbf{A}} \mathbf{w} \cdot d\mathbf{l} = w_x da_x + w_y da_y + w_z da_z \quad (3.6)$$

ma per la (3.2)

$$\int_{\mathbf{A}}^{\mathbf{A}+d\mathbf{A}} \mathbf{w} \cdot d\mathbf{l} = s(\mathbf{A} + d\mathbf{A}) - s(\mathbf{A}) = \frac{\partial s}{\partial x} da_x + \frac{\partial s}{\partial y} da_y + \frac{\partial s}{\partial z} da_z \quad (3.7)$$

Se si confrontano le espressioni (3.6) e (3.7) si ottiene, dato che devono essere uguali per qualsiasi valore degli spostamenti da_x, da_y, da_z , $\mathbf{w} = \nabla s$.

e. Per un campo vettoriale tale che $\mathbf{w} = \nabla s$ vale

$$\text{rot } \mathbf{w} = \nabla \wedge \nabla s = 0 \quad (3.8)$$

La (3.8) risulta immediatamente se confidiamo nel fatto che ∇ si comporta come un normale vettore, dato che il prodotto vettoriale fra vettori paralleli è nullo. Quindi un campo derivabile come gradiente di un potenziale scalare ha rotore nullo in ogni punto e si dice *irrotazionale*. Va segnalato che in generale non vale la proprietà inversa, ovvero un campo irrotazionale non sempre deriva da un potenziale scalare ed è conservativo. La deduzione in questo senso si può fare solo se il dominio di spazio in

cui il campo è definito risulta semplicemente connesso, ossia se qualsiasi linea chiusa tracciata in esso può essere deformata (spostando ogni punto arbitrariamente come se si trattasse di un anello elastico ideale) fino a ridursi a un punto, senza uscire dal dominio stesso.

Come esempio di campo irrotazionale ma non conservativo possiamo considerare

$$\mathbf{w} = -\frac{k y}{x^2 + y^2} \mathbf{i} + \frac{k x}{x^2 + y^2} \mathbf{j} \quad (3.9)$$

Dato che esso ha la componente w_z dovunque nulla, risulteranno automaticamente nulle le componenti x e y del suo rotore, che contengono le derivate spaziali di w_z . Per la componente z abbiamo dalla (2.5)

$$(\text{rot } \mathbf{w}) \cdot \mathbf{k} = \frac{\partial w_y}{\partial x} - \frac{\partial w_x}{\partial y} = k \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2} - k \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2} = 0 \quad (3.10)$$

Quindi $\text{rot } \mathbf{w} = 0$. Calcoliamo però la circuitazione di $\mathbf{w}$ su un cerchio di raggio r disposto nel piano xy con il centro nell'origine.

$$\oint_{\Gamma} \mathbf{w} \cdot d\mathbf{l} = \oint_{\Gamma} (w_x dx + w_y dy) \quad (3.11)$$

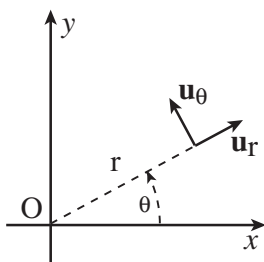
Possiamo convenientemente esprimere la traiettoria considerandola in coordinate polari nel piano xy

$$\begin{aligned} x &= r \cos \theta & y &= r \sin \theta \\ dx &= -r \sin \theta d\theta & dy &= r \cos \theta d\theta \end{aligned} \quad (3.12)$$

In questo modo la circuitazione diventa semplicemente

$$\oint_{\Gamma} \mathbf{w} \cdot d\mathbf{l} = \int_0^{2\pi} -\frac{k r \sin \theta}{r^2} (-r \sin \theta d\theta) + \frac{k r \cos \theta}{r^2} r \cos \theta d\theta = \int_0^{2\pi} k d\theta = 2\pi k \quad (3.13)$$

Quindi la circuitazione risulta non nulla. Al risultato si arrivava anche facilmente esprimendo il campo $\mathbf{w}$ in coordinate cilindriche (r, θ, z) a cui corrispondono i versori $\mathbf{u}_r, \mathbf{u}_\theta, \mathbf{k}$.



$$\mathbf{u}_r = \frac{x}{r} \mathbf{i} + \frac{y}{r} \mathbf{j} \quad \mathbf{u}_\theta = -\frac{y}{r} \mathbf{i} + \frac{x}{r} \mathbf{j} \quad (3.14)$$

In queste coordinate l'espressione (3.9) di $\mathbf{w}$ risulta molto semplice

$$\mathbf{w} = \frac{k}{r} \mathbf{u}_\theta \quad (3.15)$$

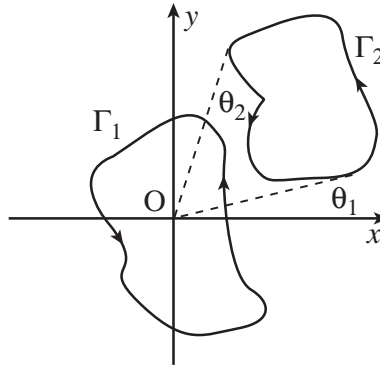
È quindi evidente che per calcolare la circuitazione di $\mathbf{w}$ lungo una circonferenza posta nel piano xy e avente il centro nell'origine, percorsa in senso antiorario (il verso associato a $\mathbf{u}_\theta$) basta moltiplicare l'intensità del vettore per $2\pi r$, ottenendo il risultato della (3.13). Operando in coordinate cilindriche si può addirittura dimostrare che il risultato non cambia se consideriamo una qualsiasi curva chiusa, che si sviluppi anche nella direzione z , purché “giri intorno” all'asse z . Possiamo infatti scrivere l'elemento $d\mathbf{l}$ in coordinate cilindriche

$$d\mathbf{l} = dr \mathbf{u}_r + r d\theta \mathbf{u}_\theta + dz \mathbf{k} \quad (3.16)$$

Utilizzando l'espressione (3.15) di $\mathbf{w}$ la circuitazione diventa

$$\oint_{\Gamma} \mathbf{w} \cdot d\mathbf{l} = \oint_{\Gamma} \frac{k}{r} \mathbf{u}_\theta \cdot (dr \mathbf{u}_r + r d\theta \mathbf{u}_\theta + dz \mathbf{k}) = \int_0^{2\pi} k d\theta = 2\pi k \quad (3.17)$$

Vediamo immediatamente che nel calcolo non influisce l'eventuale evoluzione della curva nella direzione z , per cui basta guardare alla sua proiezione sul piano xy . L'ultimo integrale della (3.17) va da 0 a 2π se la curva si concatena con l'asse z , come avviene nella figura seguente per la curva Γ_1 . Se considerassimo una curva che non si concatena con l'asse z , come la Γ_2 , la circuitazione si dovrebbe fare integrando da un angolo minimo θ_1 fino a un angolo massimo θ_2 e quindi procedendo in verso opposto da θ_2 a θ_1 , con risultato evidentemente nullo.



Quindi, in generale, la circuitazione ha un valore fisso $2n\pi k$ per ogni curva che, come Γ_1 , si concatena un certo numero n di volte con l'asse z , mentre il valore è nullo per le curve che non si concatenano.

Il risultato che il campo (3.9) sia irrotazionale ma non conservativo è legato al fatto che esso diverge in tutti i punti dell'asse z , nei quali non è quindi definito. Il dominio di definizione del campo non è semplicemente connesso: se infatti prendiamo una traiettoria chiusa che si concatena con l'asse z e cerchiamo di deformarla fino a ridurla a un punto, dovremo farla passare per o, al limite, portarla a convergere in un punto dell'asse z , uscendo quindi dal dominio di definizione. Per confronto, il campo elettrostatico creato da una carica puntiforme è definito in tutto lo spazio meno che nella posizione della carica, dove diverge. In questo caso però è possibile ridurre a un solo punto una qualsiasi traiettoria chiusa senza che questa debba toccare il punto singolare.

Il campo (3.9) non è un'astrazione matematica, ma corrisponde al campo d'induzione magnetica $\mathbf{B}$ prodotto dalla corrente circolante in un filo rettilineo di lunghezza indefinita (campo di Biot e Savart).

4. L'operatore divergenza

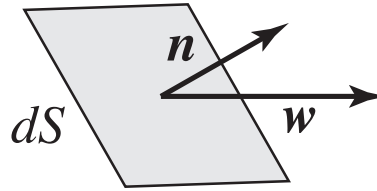
L'operatore divergenza opera su un campo vettoriale $\mathbf{w}$ e produce un campo scalare s

$$\text{div } \mathbf{w} = \nabla \cdot \mathbf{w} = \frac{\partial w_x}{\partial x} + \frac{\partial w_y}{\partial y} + \frac{\partial w_z}{\partial z} = s \quad (4.1)$$

Il significato pratico-fisico della divergenza è legato al concetto di *flusso di un campo vettoriale*. Si definisce elemento infinitesimo di flusso di un campo vettoriale $\mathbf{w}$ attraverso una superficie infinitesima dS la quantità

$$d\Phi(\mathbf{w})_{dS} = \mathbf{w} \cdot \mathbf{n} dS \quad (4.2)$$

dove $\mathbf{n}$ è il versore normale alla superficie che, essendo infinitesima, può essere considerata piana e $\mathbf{w}$ è il vettore-campo nel punto individuato dalla superficie medesima (date le dimensioni infinitesime, possiamo trascurare la variazione di $\mathbf{w}$ su di essa).



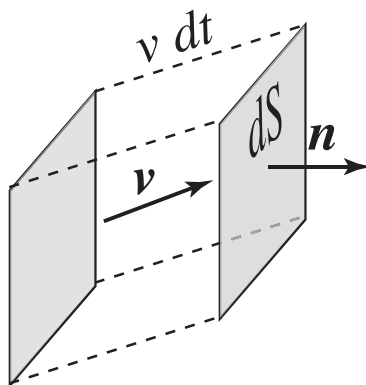
Da questa definizione possiamo estrapolare per integrazione quella di flusso di un campo vettoriale attraverso una superficie estesa.

$$\Phi(\mathbf{w})_S = \int_S \mathbf{w} \cdot \mathbf{n} dS \quad (4.3)$$

È da notare che, data una superficie infinitesima, è determinata la direzione della normale ma non il suo verso, che può essere scelto arbitrariamente. Passando a una superficie estesa potremo scegliere arbitrariamente il verso della normale in un punto, ma poi questo dovrà mantenersi coerente per tutti gli altri sulla stessa faccia, senza ribaltamenti.¹ Nel caso di superfici chiuse è convenzione considerare la normale che punta verso l'esterno, così che il flusso risulta positivo se è uscente dalla superficie.

Il nome di “flusso” dato all’operazione definita dalle (4.2) e (4.3) è appropriato, in quanto essa si presenta naturalmente in situazioni in cui si studia il movimento ordinato di particelle. Come esempio, supponiamo un fluido che occupa una porzione di spazio, con densità $\rho(x, y, z)$ variabile da punto a punto e le cui particelle si muovono con velocità $\mathbf{v}(x, y, z)$ variabile da punto a punto ma in modo tale che da poterla considerare uguale, a livello macroscopico, per tutte le particelle che occupano un volume infinitesimo. Consideriamo poi una superficie infinitesima dS con versore normale $\mathbf{n}$ e vogliamo calcolare la massa di fluido che attraversa la superficie nella direzione di $\mathbf{n}$ in un tempo infinitesimo dt .

¹ In questa sede ci limitiamo a considerare superfici topologicamente semplici, a due facce, che corrispondono nella stragrande maggioranza dei casi alle situazioni fisiche d’interesse, senza la pretesa di analizzare casi più complessi, come sarebbero ad esempio quelli di un *nastro di Möbius* o una *bottiglia di Klein*.



Dalla figura si vede che la massa dm di fluido che attraverserà la superficie data in un tempo dt è quella che inizialmente occupa il volume dV del solido avente per basi dS e una superficie parallela, distanziata dagli spigoli di lunghezza $v dt$ diretti come $\mathbf{v}$. Avremo quindi²

$$dm = \rho dV = \rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} dS dt = d\Phi(\rho \mathbf{v})_{dS} dt \quad \text{da cui} \quad \frac{dm}{dt} = d\Phi(\rho \mathbf{v})_{dS} \quad (4.4)$$

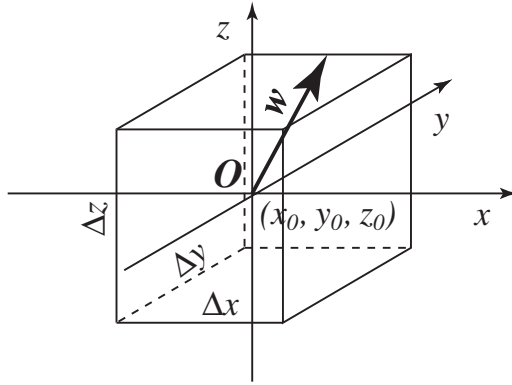
Il flusso della quantità vettoriale $\rho \mathbf{v}$ è quindi legato proprio alla massa di fluido che passa attraverso la superficie considerata per unità di tempo, e l'esempio si potrebbe allargare facilmente anche a una superficie estesa.

Vogliamo ora vedere come l'operatore divergenza sia collegato al flusso di un campo vettoriale, in particolare, a quello attraverso una superficie chiusa. Il collegamento avviene attraverso il *teorema di Gauss–Ostrogradskij*, detto anche *teorema della divergenza*. L'enunciato del teorema afferma che la divergenza in un determinato punto di un campo vettoriale corrisponde al rapporto fra il flusso del campo attraverso una superficie chiusa infinitesima disposta nel punto e il volume infinitesimo racchiuso dalla superficie stessa. In formula

$$\text{div } \mathbf{w} = \nabla \cdot \mathbf{w} = \frac{d\Phi(\mathbf{w})_{dS \text{ chiusa}}}{dV} \quad (4.5)$$

Diamo di seguito una dimostrazione del teorema, senza pretesa di rigore assoluto. Consideriamo un punto $\mathbf{O} = (x_0, y_0, z_0)$ nello spazio e un parallelepipedo di spigoli Δx , Δy , Δz con il centro in $\mathbf{O}$.

² Il volume del solido è dato dall'area di base per l'altezza, che vale $v dt \cos \theta$ dove θ è l'angolo formato fra il vettore $\mathbf{v}$ e la normale $\mathbf{n}$.



Vogliamo calcolare il flusso del campo vettoriale $\mathbf{w}$ attraverso la superficie che delimita il parallelepipedo. La definizione di flusso implica operazioni lineari, così che $\Phi_S(\mathbf{w}_1 + \mathbf{w}_2) = \Phi_S(\mathbf{w}_1) + \Phi_S(\mathbf{w}_2)$. Possiamo quindi calcolare separatamente e sommare a posteriori i flussi dovuti alle 3 componenti: $\mathbf{w} = w_x \mathbf{i} + w_y \mathbf{j} + w_z \mathbf{k}$. Calcoliamo il contributo della componente x : in questo caso dobbiamo considerare solo le due facce normali all'asse x e abbiamo

$$\Phi(w_x \mathbf{i})_{S_x} = \int_{y_0 - \frac{\Delta y}{2}}^{y_0 + \frac{\Delta y}{2}} \int_{z_0 - \frac{\Delta z}{2}}^{z_0 + \frac{\Delta z}{2}} \left[w_x\left(x_0 + \frac{\Delta x}{2}, y, z\right) - w_x\left(x_0 - \frac{\Delta x}{2}, y, z\right) \right] dy dz \quad (4.6)$$

Sviluppiamo la funzione integranda intorno a $\mathbf{O}$ fino al secondo ordine in $x - x_0$:

$$\begin{aligned} w_x\left(x_0 + \frac{\Delta x}{2}, y, z\right) - w_x\left(x_0 - \frac{\Delta x}{2}, y, z\right) &\simeq \\ &\simeq w_x(x_0, y, z) + \frac{1}{2} \frac{dw_x}{dx}(x_0, y, z) \Delta x + \frac{1}{8} \frac{d^2 w_x}{dx^2}(x_0, y, z) \Delta x^2 - \\ &- w_x(x_0, y, z) + \frac{1}{2} \frac{dw_x}{dx}(x_0, y, z) \Delta x - \frac{1}{8} \frac{d^2 w_x}{dx^2}(x_0, y, z) \Delta x^2 = \\ &= \frac{dw_x}{dx}(x_0, y, z) \Delta x \end{aligned} \quad (4.7)$$

Sostituendo la (4.7) nell'integrale (4.6) abbiamo

$$\Phi(w_x \mathbf{i})_{S_x} \simeq \int_{y_0 - \frac{\Delta y}{2}}^{y_0 + \frac{\Delta y}{2}} \int_{z_0 - \frac{\Delta z}{2}}^{z_0 + \frac{\Delta z}{2}} \left[\frac{dw_x}{dx}(x_0, y, z) \Delta x \right] dy dz \quad (4.8)$$

Se ora facciamo tendere a 0 la lunghezza degli spigoli del parallelepipedo, passando agli infinitesimi, la funzione integranda della (4.8) diventa un'espressione esatta (a meno di

infinitesimi del terzo ordine) e, dato che il campo d'integrazione si restringe intorno a $\mathbf{O}$, può essere sostituita dal suo valore in $\mathbf{O}$. Otteniamo

$$d\Phi(w_x \mathbf{i})_{dS_x} = \frac{dw_x}{dx}(x_0, y_0, z_0) dx dy dz \quad (4.9)$$

Allo stesso modo si possono calcolare i contributi delle altre componenti e si ottiene

$$d\Phi(\mathbf{w})_{dS} = \left(\frac{\partial w_x}{\partial x} + \frac{\partial w_y}{\partial y} + \frac{\partial w_z}{\partial z} \right) dx dy dz = \nabla \cdot \mathbf{w} dV \quad (4.10)$$

che dimostra la (4.5).

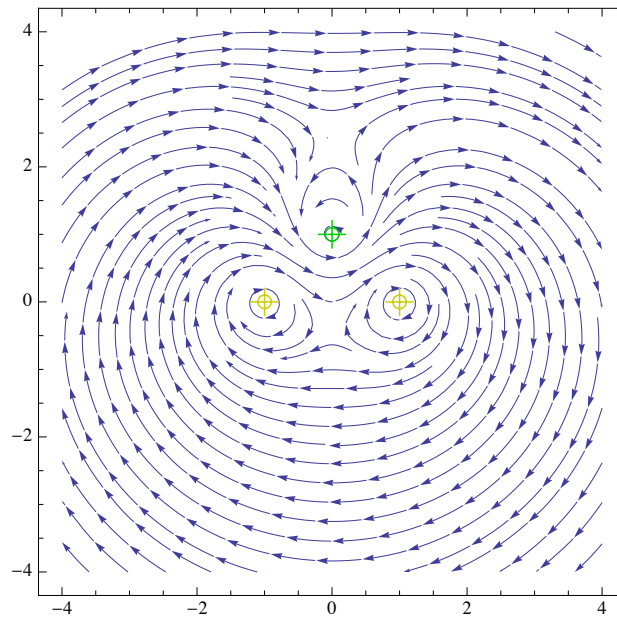
Una volta dimostrato il teorema di Gauss–Ostrogradskij, il flusso del campo attraverso una superficie chiusa estesa può essere scritto in modo alternativo

$$\Phi(\mathbf{w})_{S_{chiusa}} = \oint_S \mathbf{w} \cdot \mathbf{n} dS = \int_V \nabla \cdot \mathbf{w} dV \quad (4.11)$$

dove V è il volume racchiuso dalla superficie. La (4.11) si dimostra facilmente se pensiamo di suddividere il volume racchiuso dalla superficie in celle infinitesime e teniamo conto che per la (4.10) il termine $\nabla \cdot \mathbf{w} dV$ rappresenta il flusso uscente da una cella. Se sommiamo i flussi di tutte le celle, i flussi attraverso le pareti interne che separano una cella dall'altra si annullano a vicenda e resta solo il flusso totale sulle pareti esterne che costituiscono la superficie, da cui risulta la (4.11).

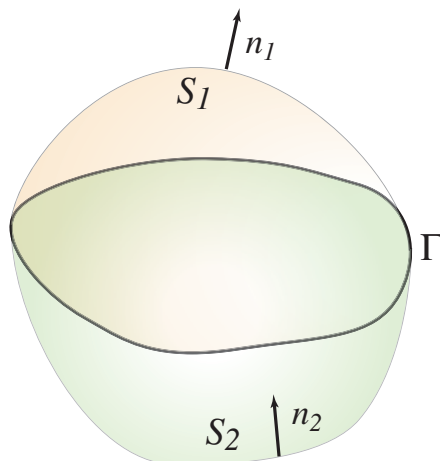
Vale la pena infine di considerare il caso di un campo vettoriale la cui divergenza è nulla in ogni punto, soprattutto perché il campo $\mathbf{B}$ d'induzione magnetica ha questa proprietà. Per un campo di questo tipo, che si dice *solenoidale*, abbiamo:

- a. Non possono esistere “sorgenti” o “pozzi” di linee di forza, come sono le cariche puntiformi per il campo elettrostatico, perché se così fosse il flusso attraverso una superficie chiusa infinitesima posta intorno a una “sorgente” o a un “pozzo” sarebbe sicuramente positivo o negativo, rispettivamente. Se le linee di forza non hanno punti di partenza o arrivo devono necessariamente essere chiuse su se stesse.



La figura mostra le linee di forza del campo $\mathbf{B}$ d'induzione magnetica prodotto da tre correnti su tre fili rettilinei paralleli di lunghezza infinita, in un piano perpendicolare ai fili. Le correnti sono di uguale intensità, due di esse scorrono nello stesso verso e la terza in verso opposto. Le tracce delle correnti nel piano sono segnate con crocifili verdi per la corrente uscente dal piano e gialli per quella entrante.

- b. L'esistenza di linee di forza chiuse esclude la conservatività del campo. Se infatti calcoliamo la circuitazione (3.4) seguendo una linea di forza, tutti i contributi dell'integrale saranno dello stesso segno (positivi o negativi a seconda che si integri nel verso delle linee di forza o in quello contrario) e il risultato non potrà essere nullo.
- c. Per la (4.11) il flusso di un campo solenoidale attraverso una qualsiasi superficie chiusa è nullo. Se calcoliamo il flusso attraverso una superficie S che ha come bordo una curva Γ , il risultato dipenderà solo dalla curva Γ e non da come evolve la superficie, e sarà lo stesso per qualsiasi altra superficie S' che si appoggia sulla stessa curva.



Per dimostrare l'assunto si considerino le due superfici S_1 e S_2 in figura, che appoggiano sulla stessa curva Γ . Il verso delle normali alle superfici è stato scelto in modo tale che, se si deforma S_2 fino a portarla a coincidere con S_1 o viceversa, anche le normali coincidano fra loro. Le due superfici se considerate insieme costituiscono una superficie chiusa S attraverso la quale il flusso del campo solenoidale è nullo. Abbiamo

$$0 = \Phi(\mathbf{w})_{S \text{ chiusa}} = \Phi(\mathbf{w})_{S_1} - \Phi(\mathbf{w})_{S_2} \quad \text{da cui} \quad \Phi(\mathbf{w})_{S_1} = \Phi(\mathbf{w})_{S_2} \quad (4.12)$$

Il segno $-$ per il flusso $\Phi(\mathbf{w})_{S_2}$ è dovuto al fatto che se vogliamo calcolare il flusso uscente dall'intera S dobbiamo rovesciare il verso della normale $\mathbf{n}_2$ in modo che punti verso l'esterno della superficie chiusa. Dato che non abbiamo fatto nessuna ipotesi particolare su S_1 e S_2 , l'uguaglianza del flusso vale per qualsiasi superficie che si appoggia su Γ .

5. L'operatore rotore

L'operatore rotore si applica a un campo vettoriale e produce come risultato un nuovo campo vettoriale

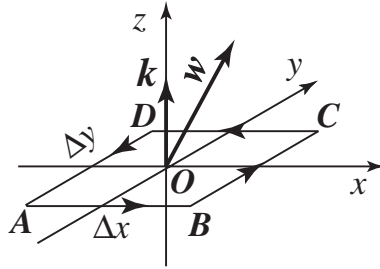
$$\text{rot } \mathbf{w} = \nabla \wedge \mathbf{w} = \mathbf{v} \quad \text{dove} \quad \begin{cases} v_x = \frac{\partial w_z}{\partial y} - \frac{\partial w_y}{\partial z} \\ v_y = \frac{\partial w_x}{\partial z} - \frac{\partial w_z}{\partial x} \\ v_z = \frac{\partial w_y}{\partial x} - \frac{\partial w_x}{\partial y} \end{cases} \quad (5.1)$$

Il significato dell'operatore rotore è legato alla circuitazione di un campo vettoriale. Il *teorema di Kelvin-Stokes* stabilisce che la circuitazione di un campo vettoriale $\mathbf{w}$ lungo una linea chiusa Γ è uguale al flusso di $\text{rot } \mathbf{w}$ attraverso una qualsiasi superficie che si

appoggia alla curva Γ , con scelta opportuna della normale alla superficie che esplicheremo nella dimostrazione. Avremo quindi

$$\oint_{\Gamma} \mathbf{w} \cdot d\mathbf{l} = \int_S (\text{rot } \mathbf{w}) \cdot \mathbf{n} dS = \Phi_S(\text{rot } \mathbf{w}) \quad (5.2)$$

dove S è una superficie che appoggia su Γ . Dimostriamo inizialmente il teorema per un circuito rettangolare di dimensioni infinitesime, che possiamo senza perdita di generalità considerare giacente nel piano xy di un sistema cartesiano. Scegliamo il verso della normale alla nostra superficie in modo che coincida con il versore $\mathbf{k}$.



Calcoliamo la circuitazione lungo un rettangolo, con lati di lunghezze Δx e Δy , costruito intorno al centro $\mathbf{O} = (x_0, y_0, z_0)$, partendo da $\mathbf{A} = (x_0 - \Delta x/2, y_0 - \Delta y/2, z_0)$, toccando nell'ordine $\mathbf{B} = (x_0 + \Delta x/2, y_0 - \Delta y/2, z_0)$, $\mathbf{C} = (x_0 + \Delta x/2, y_0 + \Delta y/2, z_0)$, $\mathbf{D} = (x_0 - \Delta x/2, y_0 + \Delta y/2, z_0)$ e tornando infine ad $\mathbf{A}$. Calcoliamo prima i due tratti di circuitazione $\mathbf{AB}$ e $\mathbf{CD}$ e poi separatamente gli altri due, sommando i risultati. Per i primi due tratti abbiamo

$$\begin{aligned} C_x &= \int_{x_0 - \frac{\Delta x}{2}}^{x_0 + \frac{\Delta x}{2}} w_x(x, y_0 - \frac{\Delta y}{2}, z_0) dx + \int_{x_0 + \frac{\Delta x}{2}}^{x_0 - \frac{\Delta x}{2}} w_x(x, y_0 + \frac{\Delta y}{2}, z_0) dx = \\ &= - \int_{x_0 - \frac{\Delta x}{2}}^{x_0 + \frac{\Delta x}{2}} \left[w_x(x, y_0 + \frac{\Delta y}{2}, z_0) - w_x(x, y_0 - \frac{\Delta y}{2}, z_0) \right] dx \end{aligned} \quad (5.3)$$

Sviluppiamo adesso la funzione integranda della (5.3) fino al secondo ordine in $y - y_0$ analogamente a quanto fatto nella (4.7) e abbiamo

$$C_x \simeq - \int_{x_0 - \frac{\Delta x}{2}}^{x_0 + \frac{\Delta x}{2}} \left[\frac{\partial w_x}{\partial y}(x, y_0, z_0) \Delta y \right] dx \quad (5.4)$$

Facciamo tendere a 0 la lunghezza dei lati del rettangolo e, analogamente a quanto successo per la (4.9), abbiamo

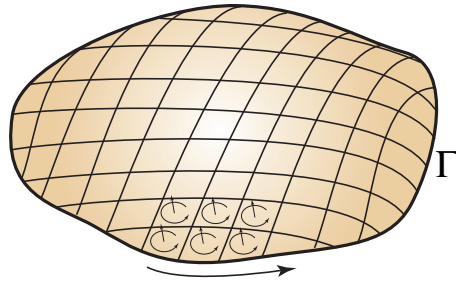
$$dC_x = -\frac{\partial w_x}{\partial y}(x_0, y_0, z_0) dxdy \quad (5.5)$$

Nello stesso modo si trattano i restanti due lati della circuitazione e si ottiene

$$\oint_{\Gamma} \mathbf{w} \cdot d\mathbf{l} = \left(\frac{\partial w_y}{\partial x} - \frac{\partial w_x}{\partial y} \right) dxdy = \text{rot } \mathbf{w} \cdot \mathbf{k} dS = d\Phi_{dS}(\text{rot } \mathbf{w}) \quad (5.6)$$

Il teorema vale quindi per una superficie infinitesima se si sceglie la normale alla superficie nel verso per cui “guardando dalla punta” del versore normale si vede procedere la circuitazione in senso antiorario (se avessimo scelto il verso opposto sarebbe comparso un segno negativo).

Una volta dimostrato il teorema per una circuito infinitesimo è semplice passare al caso finito. Data una curva chiusa Γ , prendiamo una qualsiasi superficie S che appoggia sulla curva e suddividiamola in cellette infinitesime di superfici dS_i .



Dato un verso per la circuitazione su Γ , si scelga il verso della circuitazione sulle cellette ai bordi in modo che coincida con quello di Γ nei tratti esterni e si prenda la normale alle rispettive superfici seguendo la regola enunciata poco sopra. Si estenda poi la normale e il verso di circuitazione anche a tutte le cellette interne. Calcoliamo la circuitazione sul perimetro Γ_i di ciascuna celletta e sommiamo i risultati

$$C = \sum_{i=1}^{\infty} \oint_{\Gamma_i} \mathbf{w} \cdot d\mathbf{l} = \sum_{i=1}^{\infty} d\Phi_{dS_i}(\text{rot } \mathbf{w}) = \Phi_S(\text{rot } \mathbf{w}) \quad (5.7)$$

Per come abbiamo preso i versi, nella somma delle circuitazioni ogni tratto interno dei perimetri delle cellette viene integrato due volte in sensi opposti, con risultato nullo, per cui C corrisponde alla circuitazione sulla curva originale Γ e il teorema (5.2) risulta provato anche per curve estese.

Nella dimostrazione del teorema di Kelvin–Stokes abbiamo ricavato incidentalmente che il flusso di $\text{rot } \mathbf{w}$ attraverso una superficie che appoggia su una curva Γ non dipende dalla superficie considerata, ma solo dal suo contorno Γ . Questa è una proprietà che nel paragrafo 4 abbiamo dimostrato per i campi solenoidali. Ma infatti

$$\mathbf{w}_2 = \text{rot } \mathbf{w}_1 \quad \Rightarrow \quad \text{div } \mathbf{w}_2 = \nabla \cdot (\nabla \wedge \mathbf{w}_1) = 0 \quad (5.8)$$

per le proprietà del prodotto vettoriale misto, che si annulla quando due degli operandi sono paralleli. Quindi un qualsiasi campo vettoriale che si possa esprimere come il rotore di un altro campo risulta solenoidale.

6. Applicazione doppia dell'operatore nabra

Elenchiamo di seguito i casi possibili di applicazione doppia dell'operatore nabra, alcuni dei quali trovano spesso utilizzo in fisica.

6.1 Gradiente della divergenza

$$\text{grad}(\text{div } \mathbf{w}) = \nabla (\nabla \cdot \mathbf{w}) \quad (6.1.1)$$

Il risultato dell'operatore è

$$\begin{aligned} \text{grad}(\text{div } \mathbf{w}) = & \left(\frac{\partial^2 w_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w_y}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 w_z}{\partial x \partial z} \right) \mathbf{i} + \left(\frac{\partial^2 w_x}{\partial y \partial x} + \frac{\partial^2 w_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w_z}{\partial y \partial z} \right) \mathbf{j} + \\ & + \left(\frac{\partial^2 w_x}{\partial z \partial x} + \frac{\partial^2 w_y}{\partial z \partial y} + \frac{\partial^2 w_z}{\partial z^2} \right) \mathbf{k} \end{aligned} \quad (6.1.2)$$

6.2 Divergenza del gradiente

$$\text{div}(\text{grad } s) = \nabla \cdot (\nabla s) = \nabla^2 s \quad (6.2.1)$$

Questo operatore si dice *Dalambertiano* e trasforma un campo scalare in un altro campo scalare; compare in importanti equazioni della fisica come l'equazione di Schrödinger. La forma esplicita è.

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \quad (6.2.2)$$

6.3 Rotore del gradiente

$$\text{rot}(\text{grad } s) = \nabla \wedge \nabla s = 0 \quad (6.3.1)$$

Dà sempre risultato nullo, vedi sezione 3.

6.4 Divergenza del rotore

$$\text{div}(\text{rot } \mathbf{w}) = \nabla \cdot (\nabla \wedge \mathbf{w}) = 0 \quad (6.4.1)$$

Anche questa combinazione è sempre nulla, vedi sezione 5.

6.5 Rotore del rotore

$$\text{rot}(\text{rot } \mathbf{w}) = \nabla \wedge (\nabla \wedge \mathbf{w}) \quad (6.5.1)$$

Possiamo usare le regole dei prodotti vettoriali per sviluppare questo operatore. Si ricorda che $\mathbf{a} \wedge (\mathbf{b} \wedge \mathbf{c}) = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}) \mathbf{b} - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) \mathbf{c}$.

$$\nabla \wedge (\nabla \wedge \mathbf{w}) = \nabla (\nabla \cdot \mathbf{w}) - \nabla^2 \mathbf{w} \quad (6.5.2)$$

Il primo termine è il gradiente della divergenza, visto al punto 6.1, il secondo termine è l'operatore D'alambertiano che in questo caso opera non su uno scalare ma su un vettore, ossia componente per componente. Questa combinazione di operatori compare nella formula della circuitazione del campo d'induzione magnetica $\mathbf{B}$, nel cosiddetto *teorema di Ampère*.