

La Trasformata Z

3 LA TRASFORMATTA Z

Per i sistemi a tempo discreto la trasformata z è come la trasformata di Laplace per i sistemi a tempo continuo.

Rappresenta una generalizzazione della trasformata di Fourier per i segnali e i sistemi a tempo discreto (TD).

La relazione tra input e output di un sistema a tempo discreto richiede **la moltiplicazione** di appropriate trasformate z.

Per la trasformata Z possono essere definiti **poli e zeri** (valori di Z che annullano rispettivamente il denominatore e il numeratore della trasformata) e le stesse utili regole e intuitivi significati validi per i sistemi a tempo continuo.

Dalla trasformazione Z è facilmente ottenibile **la risposta in frequenza del sistema e può essere messa in relazione con un'appropriata trasformata di Fourier.**

La rappresentazione dei segnali campionati in termini di $\mathcal{L}$ -Trasformata è data dalla relazione:

$$X(s) = \sum_{n=0}^{\infty} x(nT) e^{-nTs}$$

essa contiene i termini esponenziali, ciascuno dei quali rappresenta il ritardo finito del generico impulso ennesimo.

Per ottenere una forma algebrica della equazione caratteristica dei sistemi campionati si esegue una trasformazione dalla variabile complessa s a una variabile z :

$$z = e^{sT} \quad \Rightarrow \quad s = \frac{1}{T} \ln z \quad \text{da cui:}$$

$$X(z) = X(s) \Big|_{s=\frac{1}{T} \ln z} = \sum_{n=0}^{\infty} x(nT) e^{-nTs} \Big|_{s=\frac{1}{T} \ln z} = \sum_{n=0}^{\infty} x(nT) z^{-n}$$

che prende il nome di **z trasformata della funzione $x(nT)$** di cui la $X(s)$ è la $\mathcal{L}$ -Trasformata.

Confrontando la $\mathcal{L}$ -Trasformata e la Z-Trasformata:

$$X(s) = \mathcal{L}\{x(t)\} = \int_0^{\infty} x(t) e^{-ts} dt$$

e

$$X(z) = \mathcal{Z}\{x(nT)\} = \sum_{n=0}^{\infty} x(nT) z^{-n}$$

si vede come:

- la variabile continua e indipendente t sia sostituita dalla variabile discreta n ;
- l'integrazione sia sostituita da una sommatoria.

3.1 Definizione della trasformata Z

La trasformata z della sequenza $x(n)$ è definita dalla relazione:

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) z^{-n} \quad (3.1.1) \text{ con } z \text{ variabile complessa.}$$

La trasformata Z è definita come

➤ **trasformata Z bilatera (two-sided z transform)**, per n che varia da $-\infty$ a $+\infty$

➤ **trasformata Z monolatera (one-sided z transform)**, che è la stessa espressione per n che varia da 0 a ∞ .

$$X(z) = \sum_{n=0}^{\infty} x(n) z^{-n}$$

Quindi la trasformata **Z monolatera (one-sided z transform)** è usata soprattutto per **le sequenze causali**, dove le due trasformazioni sono sempre identiche.

Per la presenza del fattore z^{-n} è possibile che la trasformata Z converga, anche quando la DTFT non converge.

La trasformata z monolatera si utilizza per la soluzione di equazioni alle differenze finite con condizioni iniziali non nulle (analogamente alle L -trasformate monolateri).

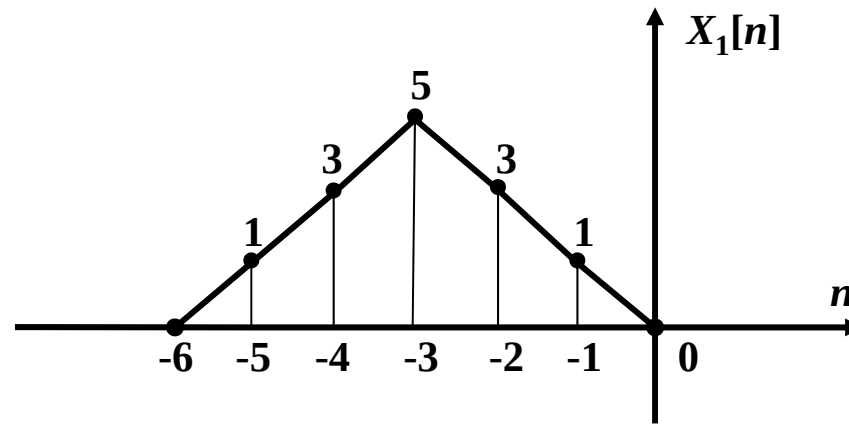
Di seguito non sarà fatta questa distinzione e semplicemente ci si riferirà alla trasformata bilatera come alla trasformata Z della $x(n)$.

Per la trasformata Z valgono le seguenti proprietà:

- ***Le due versioni coincidono se $x(n)=0$ per $\forall n<0$;***
- ***per $z=e^{j\omega}$ la trasformata z bilatera coincide con la trasformata discreta di Fourier (DTFT Discrete-Time Fourier Transform) di una sequenza $x[n]$, se questa esiste;***
- ***entrambe le trasformate (Laplace e Fourier) sono operatori lineari:***
 $Z\{a x_1(n)+b x_2(n)\}=a Z\{x_1(n)\}+b Z\{x_2(n)\}.$

Si noti che la funzione $X(z)$ è, di fatto, una serie di Laurent nella variabile complessa z e così tutte le proprietà e i teoremi validi per queste serie nella teoria delle variabili complesse si applicano alla trasformata z .

Es: Poiché i termini della sommatoria sono moltiplicati per z^{-n} , è possibile che la trasformata Z converga quando la DTFT non converge.

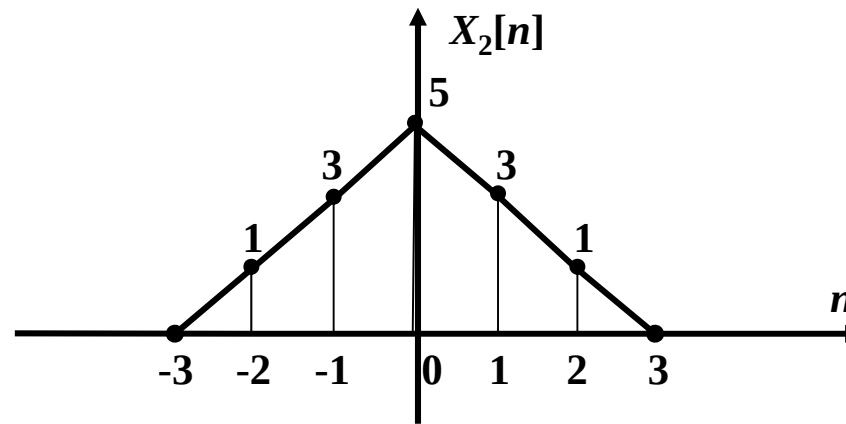


$X_1[n] \Rightarrow X[-6]=0, X[-5]=1, \dots, X[0]=0$ per cui:

$$X[z] = \sum_{-\infty}^{+\infty} (X[n] \cdot |z|^{-n}) \cdot e^{-j\omega n}$$

$$X[z] = 0 \cdot z^6 + 1 \cdot z^5 + 3 \cdot z^4 + 5 \cdot z^3 + 3 \cdot z^2 + 1 \cdot z^1 + 0 \cdot z^0$$

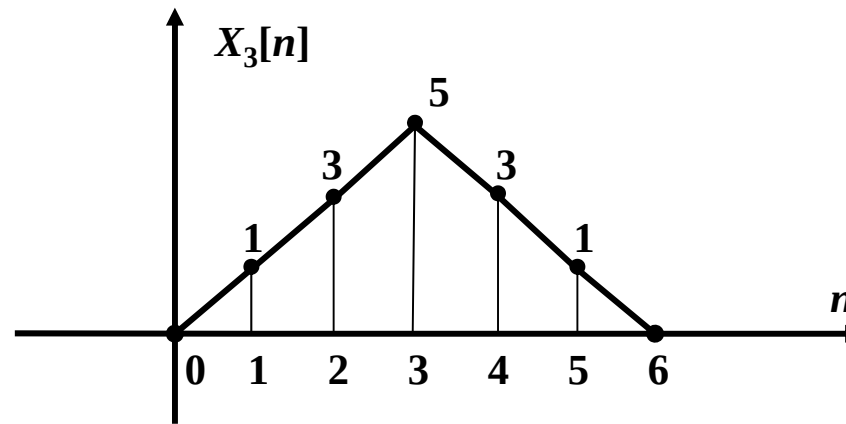
che converge $\forall z$ tranne che per $z = \infty \Rightarrow \infty^n = \infty$



$$X_2[n] \Rightarrow X[-3]=0, \quad X[-2]=1, \quad X[-1]=3, \quad X[0]=5, \\ X[1]=3, \quad X[2]=1, \quad X[3]=0$$

$$X[z] = 0 \cdot z^3 + 1 \cdot z^2 + 3 \cdot z + 5 \cdot z^0 + 3 \cdot z^{-1} + 1 \cdot z^{-2} + 0 \cdot z^{-3}$$

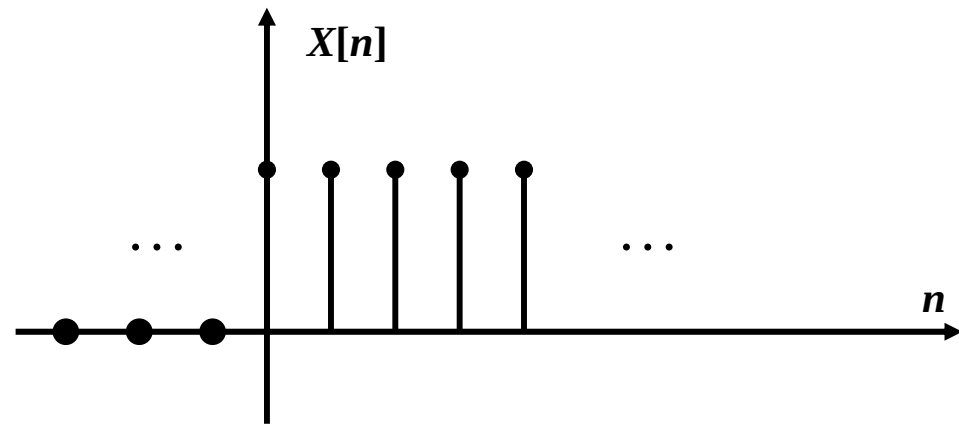
converge $\forall z$ tranne che per $z = 0$ ($0^{-1} = \infty$) e per $z = \infty$ ($\infty^n = \infty$)



$$X_3[n] \Rightarrow X[0]=0, \quad X[1]=1, \quad X[2]=3, \quad X[3]=5, \\ X[4]=3, \quad X[5]=1, \quad X[6]=0$$

$$X[z] = 0 \cdot z^0 + 1 \cdot z^{-1} + 3 \cdot z^{-2} + 5 \cdot z^{-3} + 3 \cdot z^{-4} + 1 \cdot z^{-5} + 0 \cdot z^{-6}$$

converge $\forall z$ tranne che per $z = 0$, infatti $0^{-1} = \infty$



gradino unitario

$x[n] = u[n]$ non è assolutamente sommabile, infatti:

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |u[n]| = \infty$$

mentre la sequenza $z^{-n} u[n]$ è assolutamente sommabile se $z > 1$

Infatti:

$$X[z] = 1 \cdot z^0 + 1 \cdot z^{-1} + 1 \cdot z^{-2} + 1 \cdot z^{-3} + \dots$$

Per il gradino unitario la trasformata z esiste con una ROC $|z| > 1$

ALTRI ESEMPI

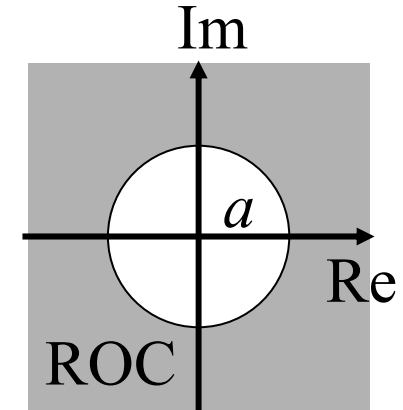
La serie $\sum_{n=0}^{\infty} a^{-n}$ può essere espressa: $\sum_{n=0}^{\infty} a^{-n} = \frac{1}{1-a^{-1}}$ per $|a| > 1$

e la serie $\sum_{n=n_1}^{n_2} a^{-n} = \frac{a^{-n_1} - a^{-(n_2+1)}}{1-a^{-1}}$

Esempio 1

$$x[n] = a^n u[n]$$

$$X[z] = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a^n u[n] z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} (az^{-1})^n = \frac{1}{1-az^{-1}} = \frac{z}{z-a}$$



Converge per $|az^{-1}| < 1$ per cui deve essere $|z| > |a|$

Esempio 2

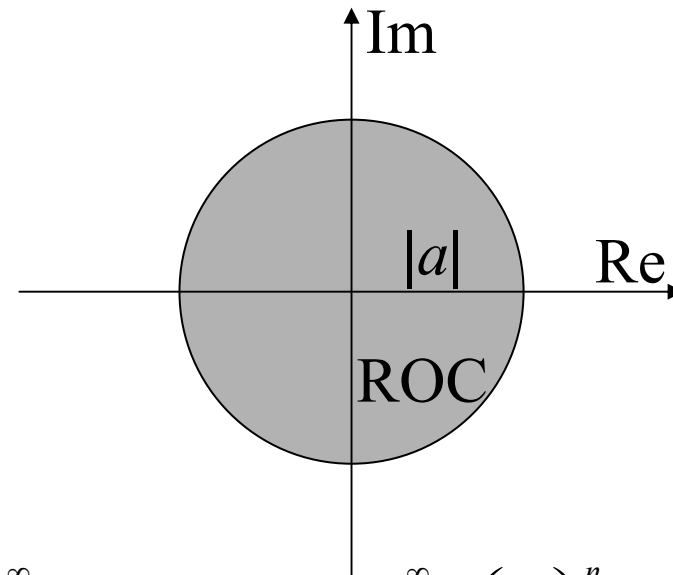
$$x[n] = -a^n \cdot u[-n-1]$$

$$X[z] = -\sum_{n=-\infty}^{\infty} a^n u[-n-1] z^{-n} =$$

$$= -\sum_{n=-\infty}^{-1} a^n z^{-n} = -\sum_{n=1}^{\infty} a^{-n} z^n = -\sum_{n=1}^{\infty} (a^{-1} z)^n = -\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{z}{a}\right)^n =$$

$$= -\frac{z}{a} - \frac{z^2}{a^2} - \frac{z^3}{a^3} - \frac{z^4}{a^4} - \dots = -\frac{z}{a} \left(1 + \frac{z}{a} + \frac{z^2}{a^2} + \frac{z^3}{a^3} + \dots \right)$$

$$= -\frac{z}{a} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z}{a}\right)^n = \frac{-z/a}{1 - z/a} = \frac{z}{z - a} \quad \text{converge se } \begin{cases} |a^{-1} z| < 1 \\ |z| < |a| \end{cases}$$



Esempio 3

$$x[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n] + \left(-\frac{1}{3}\right)^n u[n]$$

$$\begin{aligned} X[z] &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2} z^{-1}\right)^n + \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{1}{3} z^{-1}\right)^n = \\ &= \frac{1}{1 - \frac{1}{2} z^{-1}} + \frac{1}{1 + \frac{1}{3} z^{-1}} = \frac{2z \left(z - \frac{1}{12}\right)}{\left(z - \frac{1}{2}\right) \left(z - \frac{1}{3}\right)} \end{aligned}$$

La ROC è definita per $|1/2 z^{-1}| < 1$ e $|1/3 z^{-1}| < 1$ ossia per $|z| > 1/2$ e $|z| > 1/3$. La prima condizione le verifica entrambe.

Esempio 4

$$x[n] = a_1^n + \dots + a_n^n \quad n > 0$$

$$X[z] = \frac{1}{1 - a_1 z^{-1}} + \dots + \frac{1}{1 - a_n z^{-1}}$$

La ROC è definita per $|z| > \max(|a_1|, \dots, |a_n|)$

Regione di convergenza

Per definire la regione di convergenza occorre tener presente che essa:

- non può contenere alcun polo, infatti per definizione la trasformata z non converge in corrispondenza di un polo
- ed è limitata da poli o da zeri o da infinito.

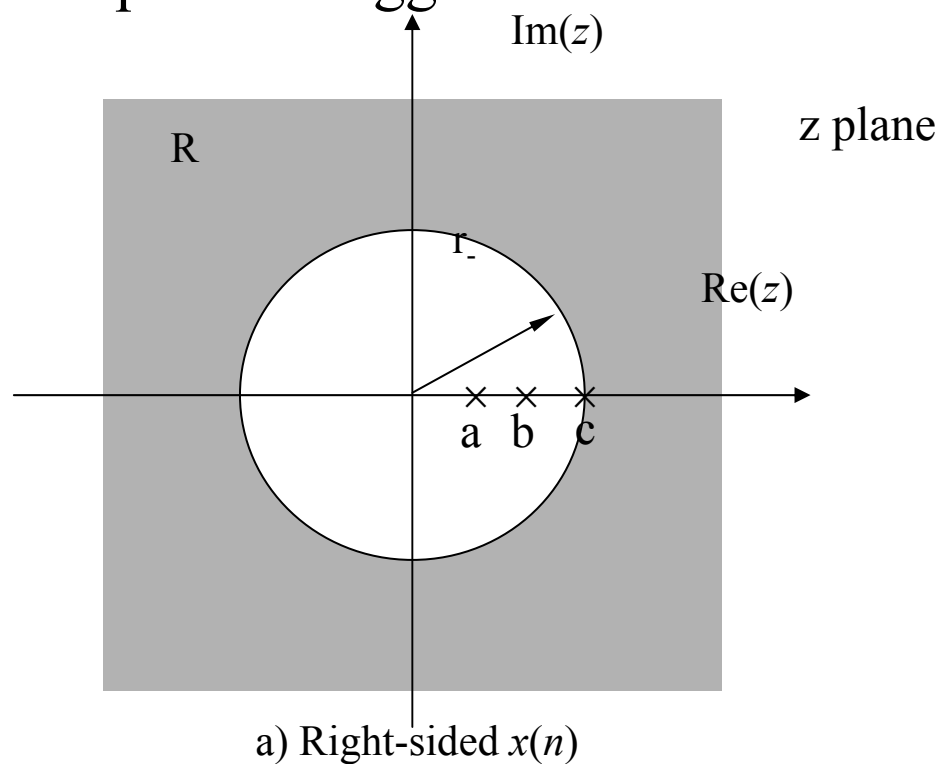
Per dimostrare ciò si possono fare le considerazioni riportate di seguito.

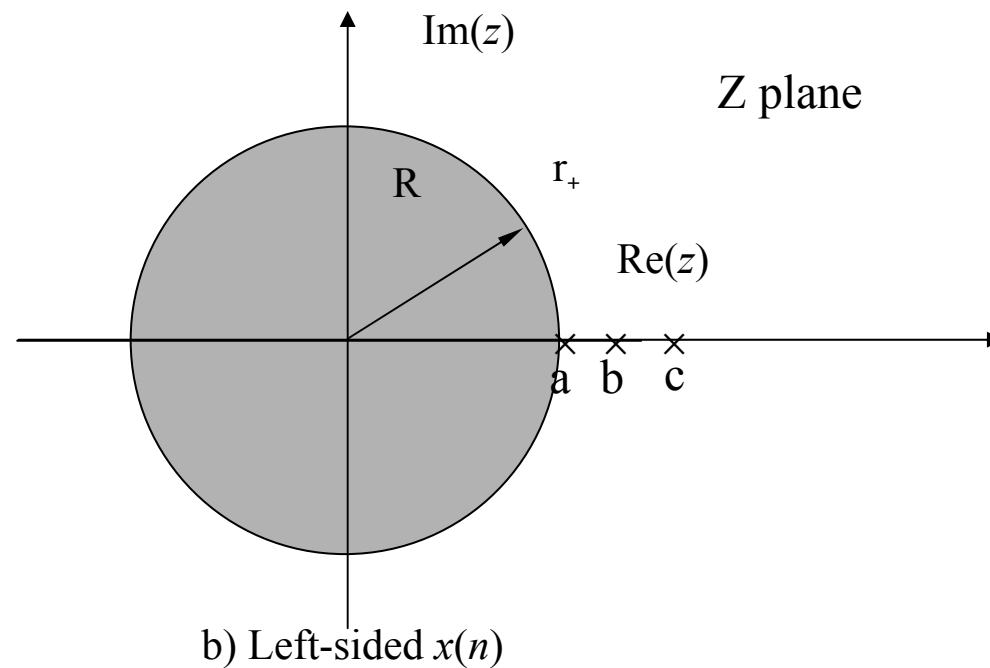
Per verificare che la regione di convergenza è limitata da poli
si consideri da prima il caso una sequenza monolatera
destra e assumiamo che i poli siano $a_0, a_1, \dots, a_N$, essendo
 a_N il polo a cui corrisponde l'ampiezza maggiore.
Per semplicità si ipotizza che i poli siano tutti semplici, poiché
la dimostrazione é facilmente generalizzabile.
Quindi per $n > n_0$ definito, la sequenza consiste in una
sommatoria di esponenziali della forma:

$$x(n) = \sum_{k=0}^N A_k (a_k)^n, \quad n > n_0$$

La regione di convergenza è determinata dall'insieme dei
valori di z per i quali la sequenza $x(n) z^{-n}$ è assolutamente
sommabile.

- Poiché una sequenza monolatera destra della forma $(a_k)^n z^{-n}$ é assolutamente sommabile per $|z| > |a_N|$, ma non per $|z| < |a_N|$. Ciò implica che la sequenza $x(n)$ ha una regione di convergenza definita per $|z| > |a_N|$, cioè è limitata all'interno dal polo con ampiezza maggiore e all'esterno dall'infinito.



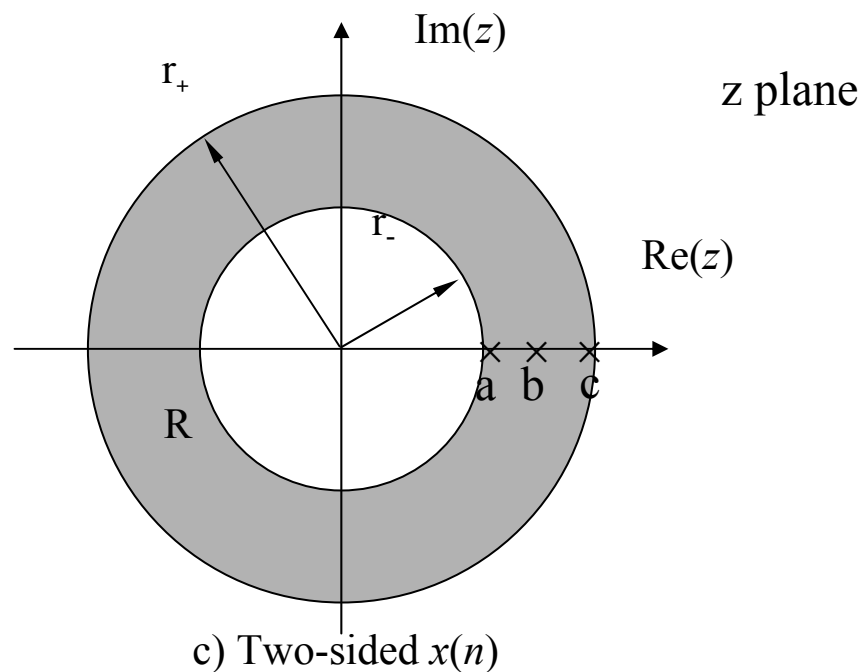


- Con procedimento analogo si dimostra che per la sequenza monolatera sinistra la regione di convergenza è limitata all'esterno dal polo con ampiezza minore e all'interno da $z=0$, se $n_0 > 0$, mentre converge anche in $z=0$ quando $n_0 \leq 0$, essendo la sequenza anticausale.

Per una sequenza bilatera alcuni dei poli sono relativi a indici $n \geq 0$ e la restante parte a indici $n \leq 0$.

La regione di convergenza sarà limitata:

- all'interno dal polo con ampiezza maggiore relativo a indici n con $n \geq 0$ e
- all'esterno dal polo con ampiezza minore relativo a indici n con $n \leq 0$.



Regione di convergenza

In generale *la serie $X(z)$ converge solo per certi valori di z* , ossia:

$$z = |z|e^{j\omega} \quad \Rightarrow \quad X(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left(x(n) \cdot |z|^{-n} \right) e^{-j\omega n}$$

converge se: $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left| x(n) \cdot |z|^{-n} \right| < +\infty$

ossia *se è verificata la condizione di assoluta sommabilità*.

Osservazioni:

1. *La $Z\{\}$ può essere applicata ad una classe di sequenze più ampia rispetto alla Trasformata Discreta di Fourier (DTFT);*
2. *Se c'è convergenza per $z_0 = |z_0|e^{j\omega_0}$, la serie converge in tutti i punti della circonferenza di raggio $|z_0|$ e centro nell'origine;*
3. *Calcolare la Trasformata Discreta di Fourier (DTFT) equivale a valutare la $Z\{\}$ sul cerchio unitario.*

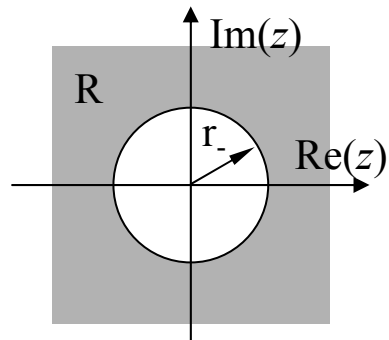
Sequenze bilatere generiche (Two-Sided z Transform):

la regione di convergenza R per $X(z)$, se esiste, è un anello anulare (anular ring) nel piano z della forma:

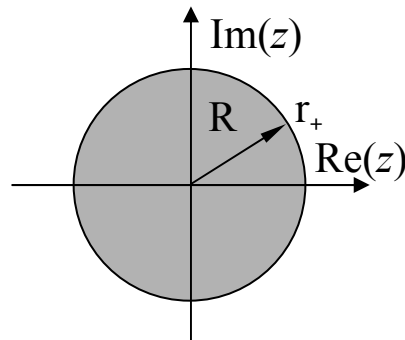
$$r_- < |z| < r_+ ; \quad (3.1.2.)$$

r_- e r_+ devono essere incluse nelle specifiche di $X(z)$ affinché la trasformata di z sia completamente definita.

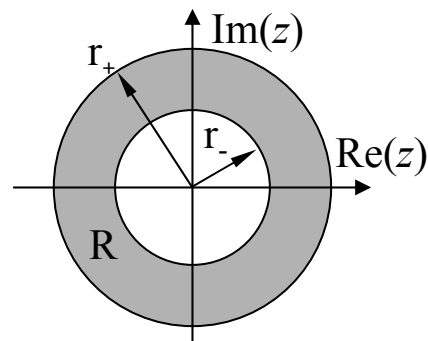
Le quattro possibili forme della R sono illustrate nella figura successiva.



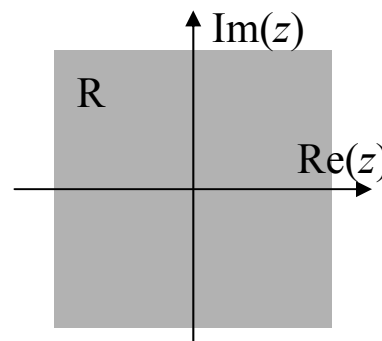
a) Right-sided $x(n)$



b) Left-sided $x(n)$



c) Two-sided $x(n)$



d) Finite-Duration $x(n)$

Si noti che nei casi riportati nelle figure (b) e (d), il limite inferiore della ROC è:

$$r_- = 0,$$

mentre nei casi riportati nelle figure (a) e (d), il limite superiore della regione di convergenza è: $r_+ = \infty$.

La ROC può, o non può contenere $z = 0$ o $z = \infty$, rispettivamente. Per esempio nel caso (a) si può avere:

$$r_- < |z| < \infty \quad \text{oppure} \quad r_- < |z| \leq \infty$$

mentre nel caso (b):

$$0 < |z| < r_+ \quad \text{oppure} \quad 0 < |z| \leq r_+.$$

Tutti i quattro casi diventano gli stessi se $r_- = 0$ e se $r_+ = \infty$: in tal caso $x(z)$ converge ovunque, fatta eccezione per $z=0$ e/o $z=\infty$.

Tutti e quattro i casi corrispondono alle seguenti condizioni nel dominio del tempo:

Sequenze monolaterale destre (Rigth-sided sequences):

Una sequenza $x(n)$ che soddisfa la condizione: $x(n) = 0 \quad n < n_0$ con n_0 definito, è chiamata sequenza monolaterale destra (rigth-sided sequence).

La sua trasformata Z è quindi della forma:

$$X(z) = \sum_{n=n_0}^{\infty} x(n) z^{-n}$$

e, se converge per $z = r$, essa converge per tutti gli $|z| > |r|$ con possibile eccezione per $z = \infty$, come illustrato in figura 3.1(a).

In particolare se $n_0 < 0$, la trasformata z contiene il termine $z^{|n_0|}$ e quindi non converge per $z = \infty$.

Comunque, ***se $n_0 \geq 0$, la sequenza è causale e $X(z)$ converge per $z = \infty$.***

L'ultimo caso è particolarmente utile poiché, ***se la regione di convergenza R contiene $z = \infty$, si deduce immediatamente che la sequenza è causale.***

Sequenze monolaterre sinistre(Left-sided sequence):

Una sequenza $x(n)$ che soddisfa la condizione:

$$x(n)=0 \quad n > n_0,$$

per un certo valore di n_0 , è chiamata sequenza monolaterre sinistra (left-sided sequence).

La sua trasformata è quindi della forma:
$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{n_0} x(n) z^{-n}$$

e se converge per $z = r$, converge per tutti i $|z| < |r|$ con possibile eccezione per $z = 0$, come illustrato per in fig. 3.1(b). In particolare, se $n_0 > 0$, allora $X(n)$ contiene il termine $z^{-|n_0|}$ e quindi non converge per $z = 0$. Comunque, se $n_0 \leq 0$, la sequenza è **anticausale**, e la sua trasformata converge per $z = 0$.

Sequenza bilatera (two-sided sequence):

Se una sequenza $x(n)$ non è nè monolatera destra né monolatera sinistra, e non ha lunghezza finita, è chiamata sequenza bilatera, e la regione di convergenza R per $X(z)$ è della forma mostrata in fig. 3.1(c), ammesso che esista.

Sequenza di durata finita (Finite-length sequence):

Se $x(n) = 0$, $n < n_1$ e $n > n_2$, è evidente dalla definizione della trasformata z , che $X(z)$ è converge ovunque tranne che per $z=0$ e/o per $z=\infty$, vedi fig.3.1 (d).

In particolare, se $n_2 \leq 0$, allora $x(n)$ è anticausale, e $X(z)$ converge per $z = 0$. Se d'altro canto, $n_1 \geq 0$ allora $x(n)$ è una sequenza causale, e $X(z)$ converge per $z = \infty$.

Funzioni razionali in z

Una importante classe delle trasformate Z è quella delle **funzioni razionali $X(z)$** , cioè **rapporto di polinomi in z** .

- Le radici del polinomio a numeratore sono chiamati **zeri** di $X(z)$ poiché per questi valori di z , $X(z)$ è uguale a zero.
- Le radici del polinomio a denominatore sono chiamati **poli** di $X(z)$, poiché $X(z)$ è infinita per questi valori di z .

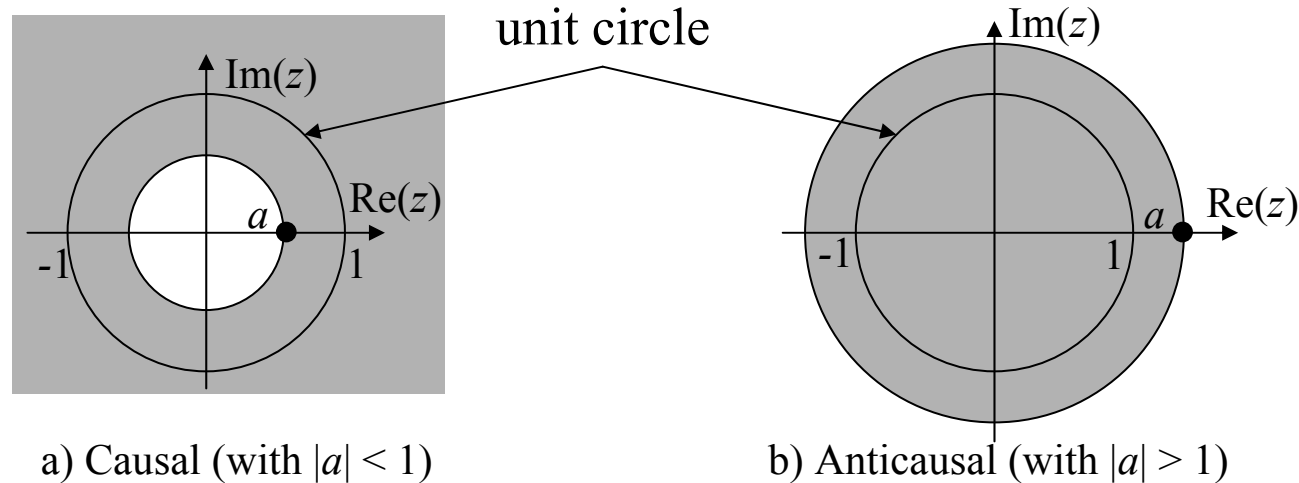
I poli giacciono all'esterno della regione di convergenza

La ROC infatti è delimitata dai poli o da infinito.

Più precisamente, la regione di convergenza ROC è delimitata dal più piccolo e/o dal più grande polo di $X(z)$.

Gli zeri possono naturalmente trovarsi in un punto del piano qualunque.

Un tipico diagramma poli/zeri è mostrato nella figura seguente.
 Il cerchio unitario $|z| = 1$ ha un significato speciale, come mostrato di seguito.



Le precedenti definizioni e considerazioni sono riportate per i seguenti segnali:

Impulso (Impulse): per $x(n) = \delta(n)$, si ha semplicemente;

$$X(z) = 1 \quad \text{per} \quad 0 \leq |z| \leq \infty \quad (3.1.3)$$

e quindi $X(z)$ converge ovunque, essendo: $X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) z^{-n}$

Impulso ritardato (Delayed Impulse):

per $x(n) = \delta(n - n_d)$ con $n_d > 0$,

$$X(z) = z^{-n_d} \quad \text{per } 0 < |z| \leq \infty \quad (3.1.4)$$

mentre per $x(n) = \delta(n + n_a)$ con $n_a > 0$,

$$X(z) = z^{+n_a} \quad \text{per } 0 \leq |z| < \infty \quad (3.1.5)$$

Gradino unitario(Unit Step):

per $x(n) = u(n)$, si ha:

$$X(z) = \sum_{n=0}^{\infty} z^{-n} = \frac{1}{1 - z^{-1}}, \quad \text{per } |z| > 1 \quad (3.1.6)$$

e quindi $X(z)$ ha un singolo polo per $z = 1$. Moltiplicando numeratore e denominatore per z , possiamo ancora scrivere $X(z)$ come:

$$X(z) = \frac{z}{z - 1}, \quad \text{per } |z| > 1$$

dove si vede che $X(z)$ ha uno zero per $z = 0$.

Sequenza esponenziale (exponential sequence) :

per l'esponenziale causale $x(n)=a^n u(n)$,

$$\begin{aligned} X(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} a^n z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} (az^{-1})^n \\ &= \frac{1}{1 - az^{-1}} = \frac{z}{z - a}, \quad \text{converge per } |z| > |a| \end{aligned} \quad (3.1.7)$$

$X(z)$ ha un polo per $z=a$ e uno zero per $z=0$ come mostrato in figura 3.2(a). D'altro canto, se $x(n) = -a^n u(-n-1)$, che è anticausale,

$$\begin{aligned} X(z) &= - \sum_{n=-\infty}^{-1} a^n z^{-n} = - \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{z}{a}\right)^n \\ &= - \frac{z}{a} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z}{a}\right)^n = \frac{-z/a}{1 - z/a} = \frac{z}{z - a}, \quad \text{converge per } |z| < |a| \end{aligned} \quad (3.1.8)$$

Questo diagramma poli/zeri è mostrato in figura 3.2(b). Si vede la necessità di indicare la regione di convergenza in $X(z)$, altrimenti le trasformate z di queste due diverse sequenze in (3.1.7) e (3.1.8) dovrebbero essere esattamente le stesse.

Nella tabella successiva sono riportate le trasformate di sequenze comuni.

Sequenza	Z - Trasformata	ROC
$\delta(n)$	1	all z
$\delta(n-m), \quad m > 0$	z^{-m}	$ z > 0$
$\delta(n+m), \quad m > 0$	z^m	$ z < \infty$
$u(n)$	$\frac{1}{1-z^{-1}}$	$ z > 1$
$-u(-n-1)$	$\frac{1}{1-z^{-1}}$	$ z < 1$
$a^n u(n)$	$\frac{1}{1-az^{-1}}$	$ z > a$
$-a^n u(-n-1)$	$\frac{1}{1-az^{-1}}$	$ z < a$
$na^n u(n)$	$\frac{a}{(1-az^{-1})^2}$	$ z > a$
$[\cos n\omega_0]u(n)$	$\frac{1-(\cos \omega_0)z^{-1}}{1-2(\cos \omega_0)z^{-1}+z^{-2}}$	$ z > 1$
$[\sin n\omega_0]u(n)$	$\frac{1-(\sin \omega_0)z^{-1}}{1-2(\cos \omega_0)z^{-1}+z^{-2}}$	$ z > 1$
$r^n [\cos n\omega_0]u(n)$	$\frac{1-r(\cos \omega_0)z^{-1}}{1-2r(\cos \omega_0)z^{-1}+r^2z^{-2}}$	$ z > r$
$r^n [\sin n\omega_0]u(n)$	$\frac{1-r(\sin \omega_0)z^{-1}}{1-2r(\cos \omega_0)z^{-1}+r^2z^{-2}}$	$ z > r$

Osservazioni

Per avere corrispondenza biunivoca fra sequenze e trasformate occorre specificare la regione di convergenza (R oppure ROC);

Le trasformate di interesse sono in genere funzioni razionali reali della variabile (z^{-1}) o della (z).

3.2. Trasformata z inversa o antitrasformata z

Spesso si possono analizzare segnali o progettare sistemi a tempo discreto usando le loro trasformate z , senza dover riconvertire le trasformate alle sequenze corrispondenti.

Ma questa conversione è talvolta voluta o necessaria e prende il nome di *trasformazione inversa z* , o *antitrasformata*.

La definizione formale della trasformata z inversa è concettualmente semplice, ma talvolta scomoda da usare.

In particolare, per le trasformate di funzioni razionali si hanno metodi più semplici per invertire la trasformata z .

Per determinare l'espressione della antitrasformata z si utilizza il **teorema dell'integrale di Cauchy** della teoria delle variabili complesse, che stabilisce che:

$$\frac{1}{2\pi j} \oint_{\Gamma} z^{k-1} dz = \begin{cases} 1, & k = 0 \\ 0, & k \neq 0 \end{cases} \quad (3.2.1)$$

dove Γ è il contorno di integrazione in senso antiorario, comprendente l'origine (percorso che contiene l'origine).

Quindi per ricavare $x(n)$ da $X(z)$, si moltiplicano entrambi i membri della (3.1.1) per $z^{k-1}/2\pi j$ e si integra lungo un opportuno contorno Γ in R per ottenere:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi j} \oint_{\Gamma} X(z) z^{k-1} dz &= \frac{1}{2\pi j} \int_{\Gamma} \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) z^{-n+k-1} dz \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) \frac{1}{2\pi j} \oint_{\Gamma} z^{-n+k-1} dz = x(k). \end{aligned}$$

Quindi **la trasformata inversa z** è data da:

$$x(n) = \frac{1}{2\pi j} \oint_{\Gamma} X(z) z^{n-1} dz, \quad (3.2.2)$$

dove Γ è un contorno in senso antiorario nella regione di convergenza di $X(z)$, comprendente l'origine. Si sa che un'opportuna Γ comprendente l'origine può sempre essere definita, poiché R è un anello centrato nell'origine .

Nel caso generale, dove $X(z)$ è una funzione razionale di z , il **teorema del residuo di Cauchy** stabilisce che $x(n)$ può essere valutata attraverso la formula:

$$x(n) = \sum_i \rho_i, \quad (3.2.3)$$

dove i ρ_i sono i residui di $X(z) z^{n-1}$ dei poli all'interno di Γ .

Per mettere in evidenza i k poli per $z = p_i$ si scrive esplicitamente

$$X(z)z^{n-1} = \frac{\phi_i(z)}{(z - p_i)^k}, \quad (3.2.4)$$

e il residuo per i p_i è dato da

$$\rho_i = \frac{1}{(k-1)!} \left. \frac{d^{k-1} \phi_i(z)}{dz^{k-1}} \right|_{z=p_i} \quad (3.2.5)$$

e quindi

$$\rho_i = \frac{1}{(k-1)!} \frac{d^{k-1} [(z - p_i)^k X(z) z^{n-1}]}{dz^{k-1}} \quad \text{essendo} \quad \phi_i(z) = (z - p_i)^k X(z) z^{n-1}$$

Molto spesso $k=1$, e in tal caso la (3.2.5) diventa semplicemente

$$\rho_i = \phi_i(p_i). \quad (3.2.6)$$

3.3. Trasformata z inversa per le sequenze causali

Se la regione di convergenza include $z = \infty$, cioè se R è della forma $|z| > r$, **la sequenza è causale**.

Se inoltre **$X(z)$ è una funzione razionale di z** , allora $x(n)$ può essere ottenuta molto più semplicemente, con l'uso diretto delle definizioni formali della trasformata z inversa, (3.2.2) oppure della (3.2.3).

In particolare, $X(z)$ può essere espressa come il rapporto di due polinomi della forma

$$X(z) = \frac{N(z)}{D(z)} = \frac{\sum_{m=0}^M b_m z^{-m}}{\sum_{k=0}^N a_k z^{-k}}, \quad |z| > r, \quad (3.3.1)$$

Per invertire la trasformata z si possono usare i metodi validi per le funzioni razionali riportati di seguito.

METODI PER CALCOLARE LA TRASFORMATTA INVERSA

Esistono diversi modi per calcolare la trasformatta inversa; i più comuni sono riportati di seguito:

Metodo per ispezione:

Si utilizzano all'inverso le tabelle sequenza-trasformata:

Metodo della divisione lunga (Long Division)

Partendo dalle potenze di valore z^{-1} , si divide $N(z)$ per $D(z)$ per esprimere $X(z)$ nella serie di potenze originale (3.1.1) cioè:

$$\begin{array}{r} x(0) + x(1)z^{-1} + x(2)z^{-2} + \dots \\ a_0 + a_1z^{-1} + \dots + a_Nz^{-N} \end{array} \Bigg) b_0 + b_1z^{-1} + \dots + b_Mz^{-M} \quad (3.3.2)$$

Le $x(n)$ sono quindi ottenute direttamente come i coefficienti della serie di potenze risultante da $X(z)$.

Quando il numeratore è un polinomio di grado maggiore rispetto al denominatore, occorre porre la funzione razionale in forma propria, in modo che il grado del polinomio al numeratore risulti minore del grado del polinomio a denominatore.

1. Metodo per ispezione:

Come nella trasformata di Laplace, si fa uso delle tabelle delle trasformate diretta e inversa.

$$\text{Es: } \frac{k}{1-az^{-1}} \quad |z| > |a| \quad \leftrightarrow \quad ka^n u[n]$$

$$\text{Es: } \quad \text{ROC} \quad |z| > |a| \quad C_1 = 3 \quad C_2 = 2$$

$$\begin{aligned} X(z) &= \frac{30z^2 - 12z}{6z^2 - 5z + 1} = \frac{5z^2 - 2z}{z^2 - \frac{5}{6}z + \frac{1}{6}} = \frac{5 - 2z^{-1}}{1 - \frac{5}{6}z^{-1} + \frac{1}{6}z^{-2}} \\ &= \frac{C_1}{\left(1 - \frac{1}{2}z^{-1}\right)} + \frac{C_2}{\left(1 - \frac{1}{3}z^{-1}\right)} = \frac{C_1 \cdot \left(1 - \frac{1}{3}z^{-1}\right) + C_2 \left(1 - \frac{1}{2}z^{-1}\right)}{\left(1 - \frac{1}{2}z^{-1}\right)\left(1 - \frac{1}{3}z^{-1}\right)} = \frac{(C_1 + C_2) - \left(\frac{1}{3}C_1 + \frac{1}{2}C_2\right)z^{-1}}{\left(1 - \frac{1}{2}z^{-1}\right)\left(1 - \frac{1}{3}z^{-1}\right)} \\ &= \frac{3}{1 - \frac{1}{2}z^{-1}} + \frac{2}{1 - \frac{1}{3}z^{-1}} \Rightarrow x[n] = \left[3\left(\frac{1}{2}\right)^n + 2\left(\frac{1}{3}\right)^n \right] \cdot u[n] \end{aligned}$$

$$a^n u(n) \quad \leftrightarrow \quad \frac{1}{1-az^{-1}} \quad |z| > |a|$$

$$\text{Es: } X[z] = \frac{6}{z-2} = \frac{6z^{-1}}{1-2z^{-1}} = -3 + \frac{3}{1-2z^{-1}}$$

$$\text{Polo: } z = 2$$

$$\Rightarrow x[n] = -3\delta[n] + 3 \cdot 2^n \quad n \geq 0 \quad \text{ROC } |z| > |a|$$



$$a^n u(n) \quad \leftrightarrow \quad \frac{1}{1-az^{-1}} \quad |z| > |a|$$

$$\delta(n-m) \text{ con } m > 0 \quad \leftrightarrow \quad z^{-m} \quad |z| > 0$$

$$\delta(n+m) \text{ con } m > 0 \quad \leftrightarrow \quad z^{-m} \quad |z| < \infty$$

Metodo della scomposizione o espansione in funzioni razionali elementari, o frazioni parziali (Partial Fraction Expansion) o fratti:

Se $M < N$ e la $X(z)$ non ha poli multipli, essa può essere sviluppata in frazioni parziali della forma:

$$X(z) = \frac{N(z)}{D(z)} = \frac{\sum_{m=0}^M b_m z^{-m}}{\sum_{k=0}^N a_k z^{-k}} = \sum_{k=1}^N \frac{A_k}{1 - p_k z^{-1}}, \quad |z| > r \quad (3.3.3)$$

dove p_k sono i poli di $X(z)$. Ma ciascun termine della (3.3.3) è proprio la trasformata z di una sequenza esponenziale, e quindi la trasformata inversa di z per $X(z)$ è data da

$$x(n) = \sum_{K=1}^N A_k p_k^n u(n). \quad (3.3.4)$$

Se $M \geq N$, si divide $N(z)$ per $D(z)$, partendo dalle potenze più alte di z^{-1} per ottenere

$$a_N z^{-N} + \dots + a_0 \left) \frac{C_{M-N} z^{-M+N} + \dots + C_1 z^{-1} + C_0}{b_M z^{-M} + \dots + b_1 z^{-1} + b_0} + \frac{R(z)}{D(z)} \quad (3.3.5)$$

Il polinomio resto $R(z)$ è dell'ordine di $M' = N-1$ o minore. Quindi $R(z)/D(z)$ può essere sviluppato in una espansione in frazioni parziali come prima e $X(Z)$ risulta:

$$X(z) = \frac{N(z)}{D(z)} = \sum_{i=0}^{M-N} C_i z^{n-i} + \sum_{k=1}^N \frac{A_k}{1 - p_k z^{-1}}, \quad |z| > r \quad (3.3.6)$$

$$x(n) = \sum_{i=0}^{M-N} C_i \delta(n-i) + \sum_{k=1}^N A'_k p_k^n u(n).$$

$$X(z) = \frac{N(z)}{D(z)} = Q(z) + \frac{R(z)}{D(z)} = \sum_{i=0}^{M-N} C_i z^{n-i} + \sum_{k=1}^N \frac{A_k}{1 - p_k z^{-1}}, \quad |z| > r$$

Il polinomio resto $R(z)$ è dell'ordine di $M' = N-1$ o minore. Quindi $R(z)/D(z)$ può essere sviluppato in una espansione in frazioni parziali come prima e $x(n)$ risulta:

$$x(n) = \sum_{i=0}^{M-N} C_i \delta(n-i) + \sum_{k=1}^N A'_k p_k^n u(n). \quad (3.3.6)$$

La ROC (regione di convergenza) di $X(z)$ è l'intersezione delle ROC_i dei singoli termini della sommatoria.

$a^n u(n)$	$\leftrightarrow$	$\frac{1}{1 - az^{-1}}$	$ z > a $
$\delta(n-m)$ con $m > 0$	$\leftrightarrow$	z^{-m}	$ z > 0$
$\delta(n+m)$ con $m > 0$	$\leftrightarrow$	z^{-m}	$ z < \infty$

Funzioni Razionali in z

Una gran parte delle trasformate-Z in uso, sono costituite da funzioni razionali del tipo:

$$X(z) = \frac{N(z)}{D(z)} \quad \text{Con } N(z) \text{ e } D(z) \text{ polinomi in } z$$

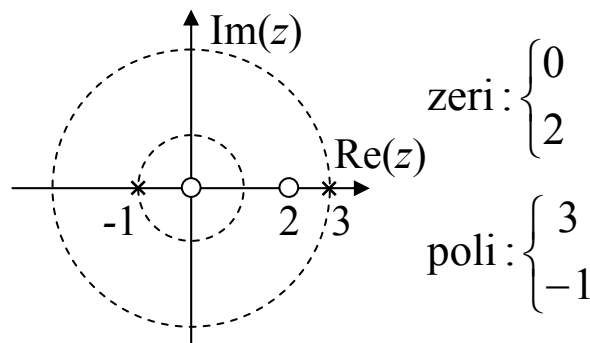
Spesso si definisce la forma equivalente in z^{-1}

ZERI : radici di $X(z)$ sono i valori di z tali che $X(z) \rightarrow 0$

POLI : radici di $D(z)$ sono i valori di z tali che $X(z) \rightarrow \infty$
per i quali $X(z)$ presenta discontinuità

La ROC è delimitata dal modulo del più piccolo e/o del più grande polo di $X(z)$

$$\text{Es: } X(z) = \frac{1 - 2z^{-1}}{(1 - 3z^{-1})(1 + z^{-1})} = \frac{z(z - 2)}{(z - 3)(z + 1)}$$



$$\begin{aligned} \text{zeri: } & \begin{cases} 0 \\ 2 \end{cases} \\ \text{poli: } & \begin{cases} 3 \\ -1 \end{cases} \end{aligned}$$

In base all'affermazione precedente si hanno tre possibili regioni di convergenza:

$|z| < 1$ minore del polo più piccolo

$1 < |z| < 3$ compreso tra il più piccolo e il più grande

$|z| > 3$ maggiore del polo più grande

Espansione in frazioni parziali

Essenzialmente è la stessa utilizzata per le trasformate di Laplace.
Alcune differenze si hanno quando si usa z^{-1}

$$X(z) = \frac{\sum_{k=0}^M b_k z^{-k}}{\sum_{k=0}^N a_k z^{-k}} = \frac{z^N \sum_{k=0}^M b_k z^{M-k}}{z^M \sum_{k=0}^N a_k z^{N-k}} = \frac{z^{N-M} \sum_{k=0}^M b_k z^{M-k}}{\sum_{k=0}^N a_k z^{N-k}} = \frac{b_0 \prod_{k=1}^M (1 - c_k z^{-1})}{a_0 \prod_{k=1}^N (1 - d_k z^{-1})} \quad \text{si ha che:}$$

- per qualsiasi M, N non si hanno poli per $z = \infty$
- Se $M < N$ si hanno $N - M$ zeri in $z = 0$
- Se $M > N$ si hanno $M - N$ poli in $z = 0$

In generale:
$$X[z] = \frac{N(z^{-1})}{D(z^{-1})} = Q(z^{-1}) + \frac{R(z^{-1})}{D(z^{-1})} \quad \text{dove:}$$

$Q(z^{-1})$ quoziente della divisione fra $N(z^{-1})$ e $D(z^{-1})$

$R(z^{-1})$ resto della divisione fra $N(z^{-1})$ e $D(z^{-1})$

- Se $M < N$ $Q(z^{-1}) \equiv 0$
- Se $M > N$ $Q(z^{-1})$ esiste e può essere anti-Trasformato per ispezione (somma di impulsi), mentre $R(z^{-1})/D(z^{-1})$ è la funzione razionale propria

Espansione in frazioni parziali

Se la funzione razionale è propria (grado del numeratore < grado del denominatore):

Poli semplici
$$X(z) = \sum_{k=1}^N \frac{A_k}{1 - d_k z^{-1}} \quad A_k = (1 - d_k z^{-1})X(z)|_{z=d_k}$$

per funzioni a coefficienti reali, poli e residui sono complessi coniugati

Poli multipli r distinti con molteplicità m_k

$$X(z) = \sum_{k=1}^r \left[\frac{A_{k_1}}{(1 - d_k z^{-1})} + \frac{A_{k_2}}{(1 - d_k z^{-1})^2} + \dots + \frac{A_{k_{m_k}}}{(1 - d_k z^{-1})^{m_k}} \right]$$

Poiché la ROC di $X(z)$ deve essere l'intersezione della ROC dei singoli termini frazionari, allora usualmente risulta $|z_1| < |z| < |z_2|$, con z_1 e z_2 opportuni

$$\frac{A_k}{1 - d_k z^{-1}} \begin{cases} \rightarrow A_k d_k^n u(n) & \text{se } |d_k| < |z_1| \\ \rightarrow -A_k d_k^n u(-n-1) & \text{se } |d_k| > |z_2| \end{cases}$$

Espansione in fratti semplici

Solo per $X(z)$ funzioni razionali

$$X(z) = \frac{\sum_{k=0}^M b_k z^{-k}}{\sum_{k=0}^N a_k z^{-k}} = \frac{z^N \sum_{k=0}^M b_k z^{M-k}}{z^M \sum_{k=0}^N a_k z^{N-k}} = \frac{b_0 \prod_{k=1}^M (1 - c_k z^{-1})}{a_0 \prod_{k=1}^N (1 - d_k z^{-1})}$$

Per poli semplici

$$X(z) = \sum_{k=1}^r \frac{A_k}{(1 - d_k z^{-1})};$$

$$A_k = (1 - d_k z^{-1}) X(z) \Big|_{z=d_k}$$

Formula per determinare
i residui

Per poli multipli

$$X(z) = \sum_{k=1}^r \left[\frac{A_{k_1}}{(1 - d_k z^{-1})} + \frac{A_{k_2}}{(1 - d_k z^{-1})^2} + \dots + \frac{A_{k_{m_k}}}{(1 - d_k z^{-1})^{m_k}} \right];$$

$$A_k = \frac{1}{k!} \frac{d^k [1 - d_k z^{-1}]^k \cdot X[z]}{dz^k} \Big|_{z=0}$$

Metodo per espansione in serie di potenze

Se $X(z)$ non è un funzione razionale di z , la sua trasformata Z inversa $x(n)$ può anche essere ottenuta dallo sviluppo in serie di potenze di $X(z)$. Per ottenere lo sviluppo in serie di potenze in z^{-1}

Es:
$$\frac{1}{1 - az^{-1}}$$

Si fa la divisione secondo il procedimento illustrato: $1 / (1 - az^{-1})$

$$\begin{array}{r} 1 - az^{-1} \overline{) 1} \\ \underline{1 - az^{-1}} \\ az^{-1} \\ \underline{az^{-1} - a^2 z^{-2}} \\ a^2 z^{-2} \dots \end{array}$$

Per cui: $1 + az^{-1} + a^2 z^{-2} + \dots$

3.4. Proprietà della trasformata Z

Le seguenti importanti proprietà della trasformata z sono facilmente deducibili dalle sue definizioni.

Linearità (Linearity)

La trasformata z di una somma pesata di sequenze uguaglia le corrispondenti somme pesate delle trasformate z cioè:

$$w(n) = ax(n) + by(n) \quad \text{implica che :}$$

$$W(z) = aX(z) + bY(z), \quad R_w \supset (R_x \cap R_y), \quad (3.4.1)$$

dove le notazioni riportate sono state usate per indicare che la regione di convergenza di $W(z)$, contiene l'intersezione di quelle di $X(z)$ e $Y(z)$. R_w è più grande di $R_x \cap R_y$ soltanto se un polo sul contorno di R_x o R_y è annullato da uno zero ottenuto nella somma pesata.

Traslazione nel tempo. Ritardo e Anticipo (Delay o Advance)

Per $w(n) = x(n - n_d)$,

$$W(z) = z^{-n_d} X(z) \quad (3.4.2)$$

con R_w coincidente con R_x fatta eccezione, possibilmente, per $z = 0$ e $z = \infty$. Poiché un ritardo di $n_d=1$ comporta che $X(z)$ sia moltiplicato per z^{-1} o viceversa, z^{-1} è talvolta considerato come ***l'operatore di ritardo unitario*** (unit delay operator). Allo stesso modo un anticipo di $-n_a$ genera :

$$W(z) = z^{n_a} X(z) \quad (3.4.3)$$

e z è talvolta chiamato ***operatore di anticipo unitario*** (unit advance operator)

Convoluzione di sequenze

Se $w(n) = x(n) * y(n)$ cioè $w(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)y(n-k)$

allora

$$W(z) = X(z)Y(z), R_w \supset (R_x \cap R_y) \quad (3.4.4)$$

La regione di convergenza di $W(z)$ è più grande della intersezione di $X(z)$ e $Y(z)$ solo se un polo sul contorno di uno è cancellato da uno zero dell'altro.

Moltiplicazione di sequenze

Se si moltiplicano due sequenze $x(n)$ e $y(n)$:

$$w(n) = x(n) y(n),$$

la corrispondente trasformata z è data da:

$$W(z) = \frac{1}{2\pi j} \int_{\Gamma} Y\left(\frac{z}{v}\right) X(v) v^{-1} dv \quad (3.4.5)$$

con una regione di convergenza che comprende almeno:

$$r_{x-} r_{y-} < |z| < r_{x+} r_{y+}.$$

Moltiplicazione di sequenze

Se si moltiplicano due sequenze $x_1(n)$ e $x_2^*(n)$:

la corrispondente trasformata z è data da:

$$W(z) = \frac{1}{2\pi j} \int_{\Gamma} X_1(v) X_2^* \left(\frac{1}{v^*} \right) v^{-1} dv \quad (3.4.5)$$

con Γ compreso nella $\text{ROC}[X_1(v)] \cap \text{ROC}[X_2(1/v^*)]$

Dalla teoria dei sistemi continui nel tempo, si ha che la moltiplicazione in un dominio implica la convoluzione nell'altro, e si è già visto che ciò è vero per la convoluzione di sequenze. Si può infatti esprimere la (3.4.5) come una forma di convoluzione attraverso il cambio di variabili

$$v = \rho e^{j\phi} \quad \text{e} \quad z = r e^{j\theta}$$

con i raggi ρ e r giacenti in R_w . In particolare se R_w contiene il cerchio unitario, si può scegliere $\rho = r = 1$ e la (3.4.5) diventa

$$W(e^{j\theta}) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} Y(e^{j(\theta-\phi)}) X(e^{j\phi}) d\phi \quad (3.4.6)$$

che è una convoluzione di $X(e^{j\theta})$ e $Y(e^{j\theta})$ considerate come funzioni di θ . Poichè $e^{j\theta}$ è periodico in θ con periodo 2π , $X(e^{j\theta})$ e $Y(e^{j\theta})$ lo sono anche loro, e la (3.4.6) è una forma della (3.4.5) sviluppata su un cerchio nel piano z e anche chiamata *convoluzione circolare (circular convolution)*.

Coniugazione complessa

Se $y(n) = x^*(n)$, si può dimostrare che:

$$Y(z) = X^*(z^*), \quad R_y = R_x \quad (3.4.7)$$

Questa proprietà è utile per derivare altre importanti proprietà, comprese le seguenti.

Moltiplicazione per una sequenza esponenziale

$$z_0^n \cdot x(n) \quad \Leftrightarrow \quad X\left(\frac{z}{z_0}\right) \quad z_0 = \text{costante}$$

la regione di convergenza $R = |z_0| R(X)$ in scala

- Se p_k è un polo di $X(z)$, allora $z_0 p_k$ è un polo di $X\left(\frac{z}{z_0}\right)$;
- Se z_0 è reale $\Rightarrow$ poli e zeri si spostano radialmente;
- Se $z_0 = e^{j\omega_0}$ $\Rightarrow$ poli e zeri ruotano di ω_0 (traslazione in frequenza nella DTFT);
- Se $z_0 = a + jb$ complesso $\Rightarrow$ si verificano entrambi gli effetti.

Convolvere di sequenze

$$x(n) * y(n) \quad \Rightarrow \quad X(z) Y(z)$$

R contiene $R(X) \cap R(Y)$

Derivazione in z

$$nx(n) \quad \Leftrightarrow \quad -z \frac{dX(z)}{dz}$$

$R = R(X)$ eccetto per $z = 0$ o per $z = \infty$.

Rovesciamento del tempo

$$x(-n) \Leftrightarrow X(1/z)$$

$R=1/R(X)$ infatti una sequenza destra diventa sinistra e viceversa.

Valore iniziale

Se $x(n)=0 \quad \forall n < 0$ allora $x(0) = \lim_{z \rightarrow \infty} X(z)$

Riassumendo:

	Sequenza	Trasformata z
a.	$x^*(n)$	$X^*(z^*)$
b.	$x(-n)$	$X(1/z)$
c.	$a^n x(n)$	$X(z/a)$
d.	$nx(n)$	$-z \frac{dX(z)}{dz}$
e.	$x(0)$ per $x(n)$ causale	$\lim_{z \rightarrow \infty} X(z)$

Relazione di Parseval

L'energia totale in una sequenza $x(n)$ è definita come:

$$E = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x(n)|^2 \quad (3.4.8)$$

Ponendo $w(n) = x(n) x^*(n) = |x(n)|^2$, si ha immediatamente che se E è finito, $W(z)$ deve convergere per $z = 1$, poiché $E = W(1)$. Ma dalla (3.4.6) e dalla (3.4.7) si ha

$$E = W(1) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X * (e^{j\phi}) X(e^{j\phi}) d\phi = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |X(e^{j\phi})|^2 d\phi \quad (3.4.9)$$

Combinando le due relazioni (3.4.9) e (3.4.8), si ottiene la relazione di Parseval:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x(n)|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |X(e^{j\phi})|^2 d\phi \quad (3.4.10)$$