PROCEDURA 20 Agosto 2007

STUDIO DI UNA RETE IN REGIME VARIABILE

1) Studio rete in $t<0$, sia che si trovi in regime stazionario che sinusoidale.
si trovano quindi $i_{Loc}(0^-)$ e $V_{Loc}(0^-)$, questi valori potrebbero anche essere già dati.
NOTA: in regime stazionario per $t<0$ i condensatori si aprono e le induttanze si cortocircuitano.
In regime sinusoidale invece diventano impedenze $\dot{Z}_C$ e $\dot{Z}_L$ e entrano nel calcolo dei valori iniziali.

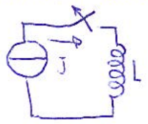
2) Studio della rete per $t=0$. Si determinano i dati iniziali, cioè i valori di corrente negli induttori e tensioni nei condensatori in $t=0^+$.
In questa fase si trovano gli eventuali impulsi, (non neccessariamente presenti). I valori iniziali di V_C e di i_L differiscono dai dati iniziali solo se sono presenti correnti impulsive in C e tensioni impulsive in L.

- Verificare se sono soddisfatte le condizioni per le tensioni impulsive e per le correnti impulsive
- Se sono soddisfatte, determinare le ampiezze degli eventuali impulsi tramite le reti ridotte per lo studio di tensioni e correnti impulsive.

3) Reti ridotte per le tensioni e correnti impulsive si ottengono dalla rete originale così:

- Correnti impulsive: ridurre la rete a soli generatori di tensione, capacità e interruttori che chiudono. Ogni altro bipolo viene aperto.

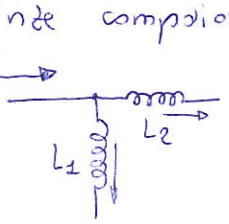
- tensioni impulsive: ridurre la rete a soli generatori di corrente, induttori e interruttori che aprono. Ogni altro bipolo viene cortocircuitato.



SI TROVA UN INSIEME DI TAGLIO
Vanno considerati anche i generatori fittizi, NOTA BENA, non possono essere sede di tensioni impulsive i lati cortocircuitati.

4) con Δ si indica l'ampiezza dell'impulso di tensione e con X l'ampiezza dell'impulso di corrente.
Nei transitori è possibile scrivere partitori di corrente dove invece di comparire delle resistenze compaiono delle induttanze.

Esempio



$$\boxed{i_{L_2}(0^+) = \frac{J}{L_1+L_2} \cdot L_1}$$ e anche $$\boxed{i_{L_1}(0^+) = \frac{J}{L_1+L_2} \cdot L_2}$$

5) Se la maglia della ridotta è induttiva ricavo l'equazione differenziale con la L.K.C a qualche nodo. (quale dipende dalla rete).
Se la maglia della ridotta è capacitiva ricavo l'equazione differenziale con la L.K.T. alla maglia.
Va ricordato che le espressioni di correnti su C e tensioni su L sono differenziali e sono:

$$\boxed{i_C(t) = C\frac{dV_C}{dt}} \qquad \boxed{v_L(t) = L\frac{di_L}{dt}}$$

È da queste espressione che trae origine l'equazione differenziale
L'equazione differenziale ordinaria potrà essere omogenea o no.
ma se trae origine da una maglia induttiva restituisce tensioni,
Se ha origine da una maglia capacitiva restituisce correnti.

Esempio

$$\boxed{\frac{dV_C}{dt} + \frac{1}{RC}V_C(t) = 0} \qquad \boxed{\frac{di_L}{dt} + \frac{R}{L}i_L(t) = 0}$$

RICAVATA DA LKC A UN NODO O INSIEME DI TAGLIO

RICAVATA DA LKT A UNA MAGLIA

RC = costante di tempo capacitiva $\qquad \frac{L}{R}$ = costante di tempo induttiva

Queste equazioni differenziali si risolvono entrambe sommando l'integrale particolare con quello dell'omogenea associata.

$$\boxed{V_C(t) = \underbrace{V_{Cp}(t)}_{\text{integrale particolare}} + \underbrace{V_{Co}(t)}_{\text{integrale dell'omogenea associata}}} \qquad \boxed{i_L(t) = \underbrace{i_{Lp}(t)}_{\text{integrale particolare}} + \underbrace{i_{Lo}(t)}_{\text{integrale dell'omogenea associata.}}}$$

6) La soluzione dell'omogenea associata è sempre del tipo:

$$\boxed{\text{Soluzione generale dell'omogenea ASSOCIATA} \quad V_{Co}(t) = A e^{-\frac{t}{\tau}}}$$

IL PROBLEMA È QUINDI TROVARE LA COSTANTE A

7) Gli insieme di taglio induttivi in pratica individuano i lati in cui è possibile la comparsa di tensioni impulsive.
Gli insiemi di tagli spesso coincidono con i nodi, quindi i lati che confluiscono sui nodi in questione, se non cortocircuitati, possono essere sede di tensioni impulsive.

8) COMPENSAZIONE DEGLI IMPULSI DI TENSIONE

Se si ha a che fare con insiemi taglio induttivi (ovvero è una rete ridotta composta da L, J, T che apre.

DEVONO VALERE:

1) LKT alle maglie delle rete ridotta per tensioni impulsive di ordine zero.

$$\sum \pm \Delta \delta_0 (t) = 0$$

2) LKC ai nodi (insiemi di taglio indipendenti della rete ridotta)

$$\sum \pm \left[i_{cont}(t) + \Delta i(0)\, \delta_{-1}(t) \right] = 0$$

queste possono essere valutate in $t = 0^-$ e in $t = 0^+$
si ottiene rispettivamente

$$\sum \pm i(0^-) = \sum \pm i_{cont}(0) = 0 \qquad t = 0^-$$

e per $t = 0^+$ si ha:

$$\sum \pm i(0^+) = \sum \pm i_{cont}(0) + \sum \pm \Delta i(0) = 0$$

3) EQUAZIONI DI BIPOLO

Su una ~~maglia~~ insieme di taglio induttiva per la ricerca delle tensioni impulsive valgono le equazioni di bipolo per i generatori reali e fittizi di corrente e l'equazione di bipolo sugli induttori.

$$\boxed{\Delta_L\, \delta_0(t) = L\, \Delta i_L(0)\, \delta_0(t) = L\, i_{L0}(0^+)\, \delta_0(t)}$$ $\Delta_L \delta_0 = L i(0^+) \delta_0$

Permettono di calcolare i valori iniziali degli integrali dei induttori della rete adeguata $\lambda_{L0}(0^+) = \Delta\lambda_L(0)$ ed anche quelli degli induttori della rete originale.

$$\boxed{\lambda_L(0^+) = \lambda_L(0^-) + \Delta\lambda_L(0)}$$

e i valori iniziali di corrente degli induttori della rete adeguata e anche quelli degli induttori della rete originali $\boxed{i_L(0^+) = i_L(0^-) + \Delta i_L(0)}$

Va osservato che dalla definizione di insieme di taglio discende che un insieme di lati può dare origini a tensioni impulsive se queste non sono cortocircuitati.

COMPENSAZIONE DEGLI IMPULSI DI TENSIONE IN PRESENZA DI CORRENTI IMPRESSE LIMITATE

Le LKC scritte per la rete originale in $t = 0^+$ si possono inoltre sostituire nelle LKT le espressioni $\Lambda_L = L \, \Delta i_L(0)$

variazione di corrente nell'induttore in 0

si giunge al sistema nei valori iniziali di corrente degli induttori della rete originale (e nelle tensioni impulsive dei generatori originali.

$$\begin{cases} \text{LKT} \quad \sum \pm L\left[i_L(0^+) - i_L(0^-)\right] = \sum \pm \Lambda_J \\ \text{LKC} \quad \sum \pm i_L(0^+) = \sum \mp J(0^+) \end{cases}$$

Λ_J: impresse dei generatori originali

$J(0^+)$: Termini noti - valori iniziali delle correnti impresse dai generatori originali.

QUESTO È IL SISTEMA DA IMPOSTARE PER LA SOLUZIONE DEGLI ESERCIZI TENENDO PRESENTE CHE AL PRIMO MEMBRO DELLA LKT ANDREBBE SOMMATO IL CONTRIBUTO DEI GENERATORI FITTIZI DI INDUTTORE E DI INTERRUTTORE QUALORA INVECE DI APPLICARLO ALLA RETE RIDOTTA LO SI APPLICASSE ALLA RETE ADEGUATA.

$$\sum \pm L\left[i_L(0^+) - i_L(0^-)\right] + \sum \pm \Lambda_J + \sum \pm \Delta i = 0$$

Δi: contributo dei generatori fittizi (ma di solito si opera in rete ridotta quindi non c'è nel sistema).

DEFINIZIONE DI INSIEME DI TAGLIO

Un insieme di taglio è un insieme di lati dei quali nessuno risulta cortocircuitato

Per l'insorgere di una tensione impulsiva è necessario:

- Che l'induttore in esame appartenga a un insieme di taglio induttivo, ovvero nella rete ridotta appartenga a un insieme di nodi e lati contenenti solo L, J, J con addendi impulsivi, interruttori che chiudono, quando tutti gli altri bipoli della rete originale siano cortocircuitati.
- Se nell'insieme di taglio induttivo è presente un generatore originale con $J(0^+) \neq 0$ e un induttore con dato iniziale non nullo $J_L(0^-) \neq 0$ O se viene aperto un interruttore.

- Inoltre può esserci in un induttore una tensione impulsiva solo se non si verifica nell'istante critico una compensazione della discontinuità, ovvero le azioni non si elidono a vicenda.

TENSIONE IMPULSIVA IN PRESENZA DI GENERATORI LIMITATI

IN PRATICA PROCEDERE COSÌ

1) Direttamente nella rete originale verificare se esistono insiemi di taglio induttivi, se non ci sono allora non vi saranno tensioni impulsive.

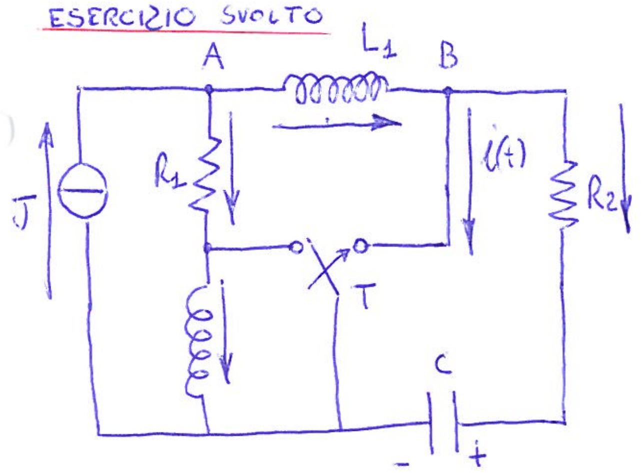
2) Se ci sono gli insiemi di tagli induttivi va tracciata la rete ridotta per le tensioni impulsive, formata solo da L, J, T in apertura.

3) Scrivere le equazioni di compensazione degli impulsi di tensione che altro non sono che LKT e LKC dal sistema si ricavano le $i_L(0^+)$ e le Δ_J dei generatori J originali e ~~Δ~~ dei generatori fittizi rappresentati dagli interruttori che aprono.

Si ricavano quindi le ampiezze degli impulsi di tensione negli induttori

$$\boxed{\Delta_L = L\left[i_L(0^+) - i_L(0^-)\right]}$$

ESERCIZIO SVOLTO



$J = 6A \quad C = 500 \mu F$

$R_1 = 12\,\Omega \quad R_2 = 24\,\Omega$

$L_1 = 20\, mH$

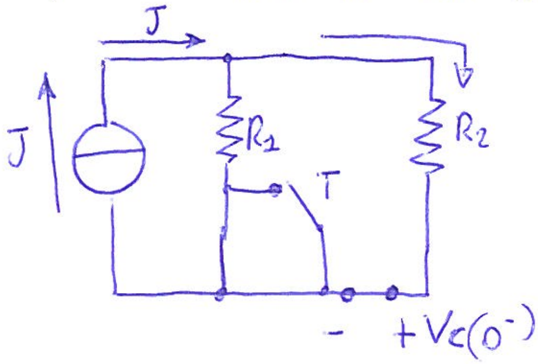
$L_2 = 40\, mH$

Il circuito è in regime stazionario per $t<0$ e con l'interruttore T in 1 e $i_{L_2}(0^-)=0$

In $t=0$ si commuta T dalla posizione 1 a 2.
Dati tutti i parametri della rete trovare $i(t)$ per $t \geq 0$

si fanno 3 passi
1) Studio per $t<0$
2) studio per $t=0$
3) studio per $t>0$

In $t<0$ la rete è in regime stazionario quindi vale la rete sottostante:



$V_c(0^-) = V_{R_1} = J R_1 = 6 \cdot 12 = 72V$

$i_{L_2}(0^-)=0$ dato dal problema

STUDIO PER $t=0$

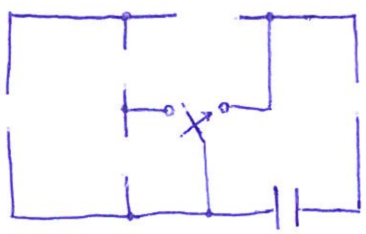
La rete cambia topologia a causa della commutazione di T.

$i_{L_1}(0)=0$ dato che si trova in serie a C

1) Verificare se ci sono maglie capacitive (per la verifica dell'insorgere di correnti impulsive del tipo $X\delta_0(t)$).
2) Verificare se ci sono insiemi di taglio induttivi per la presenza di tensioni impulsive del tipo $\Delta\,\delta_0(t)$

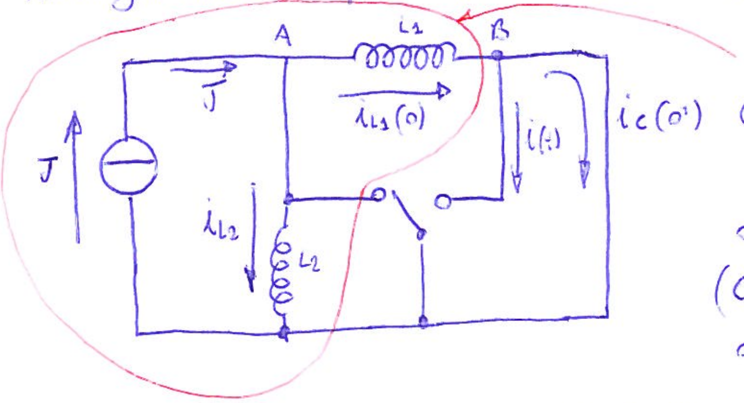
NON POSSONO ESSERCI TENSIONI IMPULSIVE, IN EFFETTI non si possono formare delle maglie capacitive visto che mancano i generatori di tensione.

Le reti ridotte per tensioni impulsive sono formate da C, E, e T che chiudono. tutti gli altri bipoli vanno aperti



NON CI SONO MAGLIE CAPACITIVE.

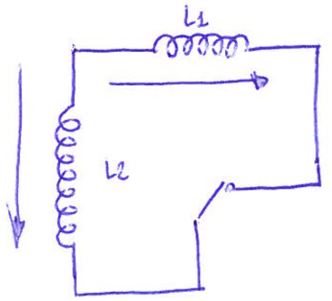
cerco gli insiemi di taglio induttivi, tengo solo L, J e interruttori che aprono, tutti gli altri bipoli vanno messi in corto.



Quindi possono originarsi delle tensioni impulsive che si studiano con la composizione degli impulsi.
(Che vale sia per impulsi di tensione che di corrente).

Al nodo B vale LKC. $i_{L1}(0^+) = i_C(0^+) + i(t)$

LKC A $\quad J - i_{L2} = i_{L1}(0^+)$



$$V_{L1}(0^+) = V_{L2}(0^+)$$

$$\Lambda_{L1}\delta_0(0^+) = \Lambda_{L2}\delta_0(0^+)$$

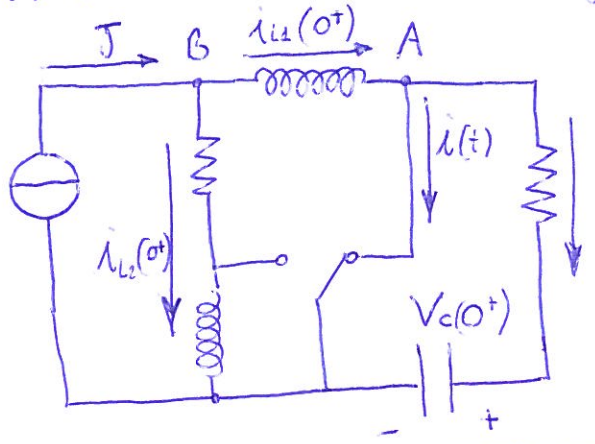
$$\Lambda_{L1} = L_1\left[i_{L1}(0^+) - i_{L1}(0^-)\right] \qquad \Lambda_{L2} = L_2\left[i_{L2}(0^+) - i_{L2}(0^-)\right]$$

$$L_1\left[i_{L1}(0^+) - i_{L1}(0^-)\right]\delta_0(0^+) - L_2\left[i_{L2}(0^+) - i_{L2}(0^-)\right]\delta_0(0^+) = 0$$

$$i_{L1}(0) = \frac{J}{L_1+L_2}\cdot L_2 = \frac{6}{40+20}\cdot 40 = \frac{240}{60} = 4\,A$$

$$i_{L2}(0) = \frac{J}{L_1+L_2}\,L_1 = \frac{6\cdot 20}{20+40} = \frac{120}{60} = 2A$$

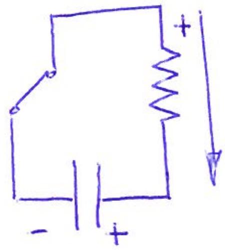
Per $t > 0$ vale la rete con la seguente topologia.



$$i_c = c\frac{dV_c}{dt}$$

LKC "A" $\boxed{i(t) = i_{L1}(0^+) - i_c(0^+)}$

LKT (R_2, C)



$$V_{R(0)} + V_{C(0^+)} = 0$$

$$V_c(0^+) = -V_R(0)$$

$$V_c(0^+) = -i_c R_2$$

$\frac{c\,dV_c}{dt}$

$$V_c(0^+) = -R_2C\frac{dV_c}{dt}$$

$$+R_2C\frac{dV_c}{dt} + V_c(0^+) = 0$$

$$\boxed{\frac{dV_c}{dt} + \frac{1}{R_2C}V_c(0^+) = 0}$$

QUESTA EQUAZIONE DIFFERENZIALE OMOGENEA SI RISOLVE COME SOMMA DELL'INTEGRALE PARTICOLARE E L'INTEGRALE DELL'OMOGENEA ASSOCIATA.

$$\boxed{V_c(t) = V_{cp} + V_{co}}$$

INTEGRALE PARTICOLARE — integrale dell'omogenea associata.

Essendo l'equazione differenziale omogenea l'integrale particolare (pensando a quello dell'omogenea) è pari ai valori iniziali: $\boxed{V_c(t) = R_1 J = 72}$

L'integrale particolare è pari al valore iniziale.

$$V_{co} = Ae^{-\frac{t}{\tau_c}} \qquad \tau = R_2C = 24 \cdot 500\,\mu F = \frac{24 \cdot 500}{1000000} = 0{,}012\ s = 12\,ms$$

$$\boxed{72 = 0 + Ae^{-\frac{t(0^+)}{\tau}}}$$

che valutato in 0^+ vale $72 = Ae^0$ $\quad$ $72 = Ae^0 = A$

quindi $A = R_1 \cancel{I_2} = R_1 J = 72$

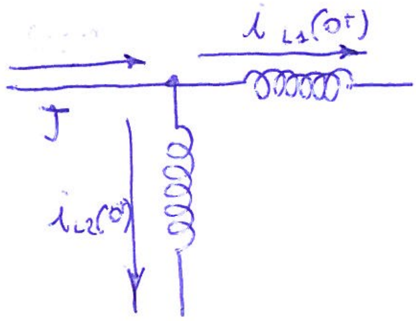
ma stiamo cercando $i(t)$ quindi riprendiamo le leggi di Kirchhoff ai nodi A e B.

già trovato

$$\boxed{i(t) = i_{L1}(0^+) - \frac{C\,dV_c}{dt}}$$

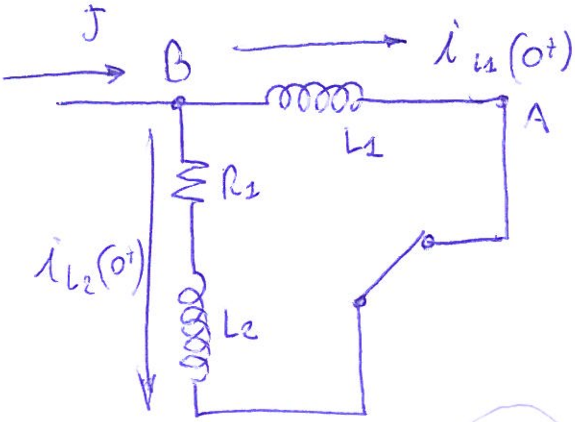
deve ancora essere trovato.

$i_{L1}(0^+)$ lo trovo con LKC al nodo B.



$$\boxed{i_{L1}(0^+) = J - i_{L2}(0^+)}$$

$$V_{L1} = \frac{L\, d\, i_{L1}(t)}{dt}$$



LKC in B $\quad \boxed{i_{L1}(0^+) = J - i_{L2}(0^+)}$

$$V_{L1} - V_{L2} - V_{R1} = 0$$

$$V_{L2} + V_{R1} = V_{L1}$$

$$V_{L1} = L_1 \frac{d i_{L1}(0^+)}{dt}$$

$$i_{L2}(0^+) \cdot R_1$$

$$V_{L2} = L_2 \frac{d i_{L2}(0^+)}{dt}$$

$$\boxed{L_2 \frac{d i_{L2}(0^+)}{dt} + R_1\, i_{L2}(0^+) = L_1 \frac{d i_{L1}(0^+)}{dt}}$$

$$L_2 \frac{d i_{L2}(0^+)}{dt} - L_1 \frac{d\, i_{L1}(0^+)}{dt} + i_{L2}(0^+) R_1 = 0$$

$$L_2 \frac{d\left(J - i_{L_1}(0^+)\right)}{dt} - L_1 \frac{d\, i_{L_1}(0^+)}{dt} + R_1\left(J - i_{L_1}(0^+)\right) = 0$$

$$L_2 \left[\frac{dJ}{dt} - \frac{d\, i_{L_1}(0^+)}{dt}\right] - L_1 \left[\frac{d i_{L_1}}{dt}\right] + R_1\left(J - i_{L_1}(0^+)\right) = 0$$

$$L_2 \left[0 - \frac{d\, i_{L_1}(0^+)}{dt}\right] - L_1 \frac{d i_{L_1}}{dt} + R_1\left(J - i_{L_1}(0^+)\right) = 0$$

$$- L_2 \frac{d\, i_{L_1}(0^+)}{dt} - L_1 \frac{d i_{L_1}}{dt} + R_1 J - i_{L_1}(0^+) R_1 = 0$$

$$- \frac{d\, i_{L_1}(0^+)}{dt} (L_2 + L_1) - i_{L_1}(0^+) R_1 = -R_1 J$$

$$\frac{d\, i_{L_1}(0^+)}{dt} (L_2 + L_1) + i_{L_1}(0^+) R_1 = R_1 J$$ divido tutto per (L_1+L_2)

$$\boxed{\frac{d\, i_{L_1}(0^+)}{dt} + i_{L_1}(0^+) \frac{R_1}{(L_1+L_2)} = \frac{R_1}{L_2+L_1} J}$$

$$\frac{d\, i_{L_1}(0^+)}{dt} + i_{L_1}^{(0^+)} \frac{R_1}{(L_1+L_2)} = \frac{R_1 J}{L_2+L_1}$$

$$\frac{d i_{L_1}}{dt} = 0$$

$$\boxed{Z + \frac{R_1}{L_2+L_1} = 0}$$

da cui $Z = -\frac{R_1}{L_2+L_1} = -\frac{1}{\tau}$

$$= \frac{-1}{\frac{(L_2+L_1)}{R_1}} = -\frac{1}{\frac{(20+40)\cdot 10^{-3}}{12}} = \frac{-1}{0{,}05 \text{ sec}}$$

da cui $T = 5\,ms$

questa equazione differenziale lineare ordinaria non omogenea si risolve sommando l'integrale particolare all'integrale dell'omogenea associata.

$$\boxed{i_{L1}(0^+) = \underbrace{i_{L1P}(0^+)}_{\text{INTEGRALE PARTICOLARE}} + \underbrace{i_{L2O}(0^+)}_{\text{INTEGRALE DELL'OMOGENEA ASSOCIATA}}}$$

$$i_{L2}(0) = Ae^{-\frac{t}{\tau}}$$

ma per $t = 0^+$ si ha $\boxed{i_{L2O}(0^+) = A}$

$$\boxed{0 + i_{L1}(0^+)\frac{R_1}{(L_1+L_2)} = \frac{R_1 J}{L_1+L_2}}$$

dove si pone $\frac{d i_{L1}(0)}{dt} = 0$ perché questa è la maniera di risolvere queste eq. differenziali

$$i_{L1}\cdot(R_1) = \frac{R_1}{\cancel{R_2}}\, J\, \frac{\cancel{(L_1+L_2)}}{\cancel{(L_1+L_2)}}$$

da cui

$$i_{L1}\cdot(R_1) = J$$

$i_{L1}(0^+)$ è noto e vale

$$\boxed{i_{L1}(0^+) = J\frac{L_2}{L_1+L_2}}$$

partitore fatto per $t=0$

$$J\frac{L_2}{L_1+L_2} = 6 + Ae^{-\frac{t}{\tau}}$$

$$J\frac{L_2}{L_1+L_2} = J + Ae^{-\frac{t}{\tau}}$$

$$J\frac{L_2}{L_1+L_2} - J = Ae^{-\frac{t}{\tau}}$$

$$J\left(\frac{L_2}{L_1+L_2} - 1\right) = A\cdot 1$$

$e^{-\frac{t}{\tau}}$ con $t=0^+$ quindi $e^{-0} = 1$

Da $$J\frac{L_2}{L_1+L_2} = J + A$$

Ricaviamo A che è la costante di integrazione.
Facciamo il minimo comune multiplo.

$$\boxed{J\,\frac{\cancel{L_2} - L_1 - \cancel{L_2}}{L_1 + L_2} = A}$$

$$J\left[-\frac{L_1}{L_2+L_1}\right] = A \qquad \boxed{A = -\frac{JL_1}{L_1+L_2}}$$

ora che conosciamo A scrivo l'espressione di $i(t)$ da KLC al nodo B

$$\boxed{i(t) = i(L_1) + i_c(t)}$$

$$i(t) = J\left(1 - \frac{L_1}{L_1+L_2}\,e^{-\frac{t}{\tau}}\right) + \left[-J\,\frac{R_1}{R_2}\,e^{-\frac{t}{\tau_c}}\right]$$

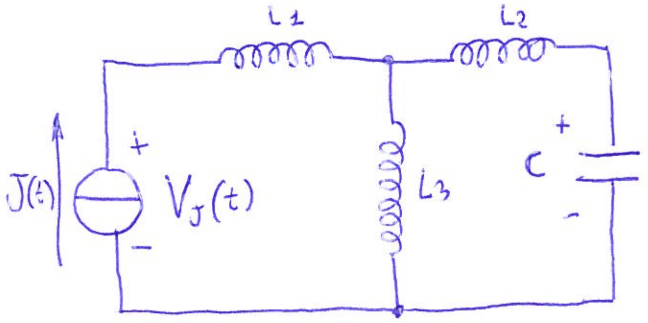
$$i(t) = J\left[1 - \frac{L_1}{L_2+L_1}\,e^{-\frac{t}{\tau_L}} - \frac{R_1}{R_2}\,e^{-\frac{t}{\tau_c}}\right]$$

$$= 6 - \frac{2\cancel{0}}{6\cancel{0}}\cdot 6\,e^{-\frac{t}{5ms}} - \frac{\cancel{6}\cdot 12}{\cancel{24}}\cdot e^{-\frac{t}{12ms}}$$

$$= 6 - 2\cdot e^{-\frac{t}{5ms}} - 3\,e^{-\frac{t}{12ms}}$$

$$\boxed{i(t) = 6 - 2e^{-\frac{t}{\tau_L}} - 3e^{-\frac{t}{\tau_c}}}$$ SOLUZIONE FINALE

Secondo esercizio



$J(t) = J\delta_{-1}(t) = 100\,\delta_{-1}(t)$

$C = 25\mu F$

$L_1 = 5\,mH$

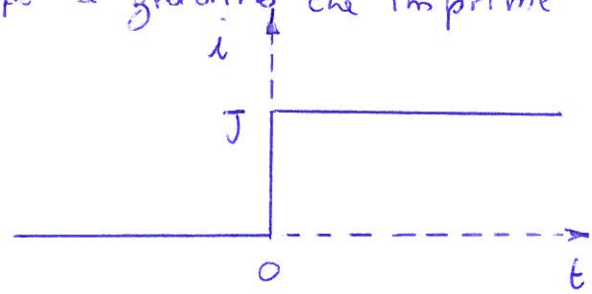
$L_2 = 20\,mH$

$L_3 = 20\,mH$

Il circuito è a riposo per $t<0$. Dati tutti i parametri della rete e l'ampiezza J del gradino di corrente impresso, trovare $V_J(t)$ per $t \geq 0$.

Soluzione Questo per $t<0$ generatore è di tipo a gradino che imprime la corrente del tipo:

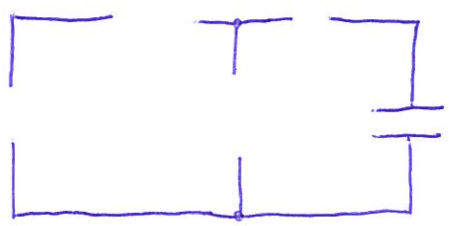
$$J(t) = J\delta_{-1}(0) = \begin{cases} 0 & t<0 \\ J & t \geq 0 \end{cases}$$



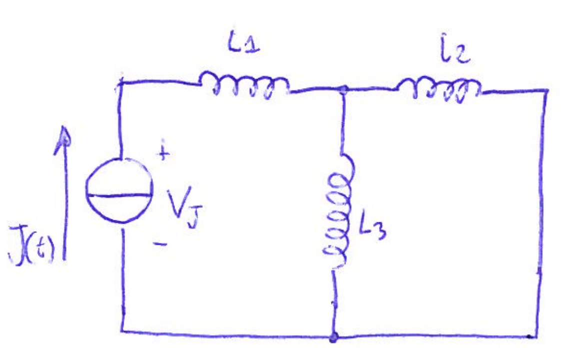
Dati iniziali: $i_{L1}(0^-) = i_{L2}(0^-) = i_{L3}(0^-) = 0\,[A]$

$V_c(0^-) = 0\,[V]$

studio per $t=0$ ricerca delle maglie capacitive per lo studio dell'insorgenza di correnti impulsive.



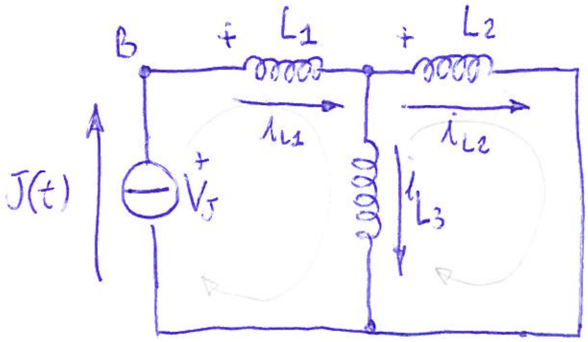
La rete ridotta per le correnti impulsive è formata solo da condensatori, generatori di tensione, e interruttori che chiudono.

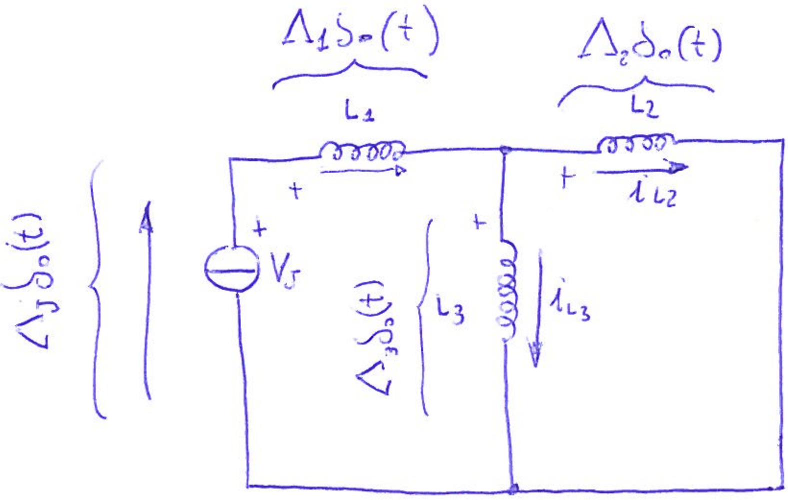


La rete ridotta per le tensioni impulsive è formata solo da induttanze, generatori di corrente e da interruttori che aprono.
Il generatore impulsivo di corrente funge da interruttore che apre.
tutti gli altri bipoli vanno in corto circuito.

Esistono insiemi di taglio formati da soli L, $J(t)$ e interruttori che si chiudono 1° insieme L_1, L_2, L_3 2° insieme $J(t), L_1$ 3° insieme $J(t), L_3, L_2$

con $J(0^+) = J \neq 0$ con $J(0^+) \neq J(0^-)$ pertanto ci possono essere tensioni impulsive.





Equazione di compensazione delle tensioni impulsive

LKT alla maglia J, L_1, L_3 $\quad \Lambda_J \delta_0(t) = \Lambda_1 \delta_0(t) + \Lambda_3 \delta_0(t)$