EQUAZIONI DIFFERENZIALI

Le reti elettriche in regime variabile si risolvono con l'ausilio di equazioni differenziali che risultano essere spesso molto simili.
La tecnica risolutiva è sempre la stessa.

EQUAZIONE DIFFERENZIALE OMOGENEA (IN CORRENTE O IN TENSIONE) DEL PRIMO ORDINE

$$\boxed{\frac{d V_C(t)}{dt} \pm \frac{1}{\tau} V_C(t) = 0}$$

ricavata da qualche LKT in una maglia capacitiva

La soluzione è somma dell'integrale particolare con l'integrale della equazione omogenea associata (generalmente è così, quindi anche quando, come in questo caso, l'equazione è già omogenea ovvero ha il secondo membro nullo).

$$\boxed{V_C(t) = V_{Cp}(t) + V_{C0}(t)}$$

nel caso che l'equazione da risolvere sia omogenea l'integrale particolare, che si ottiene risolvendo l'equazione alla quale si sostituisce la derivata della funzione incognita con zero.

ovvero si pone

$$\boxed{\frac{d V_C(t)}{dt} = 0}$$

Rimane quindi:

$$\boxed{0 \pm \frac{1}{\tau} V_C(t) = 0}$$

moltiplico ambo i membri per τ

$$\boxed{\frac{1}{RC} \cdot V_c(t) = 0}$$

$$\boxed{\frac{\cancel{RC}}{\cancel{RC}} V_c(t) = (RC) \cdot 0}$$

da cui è evidente che $\boxed{V_c(t) = 0}$

Questo è dovuto al fatto che la soluzione è omogenea associata. Se l'equazione non fosse omogenea si sarebbe ricavato un certo valore algebrico facilmente ricavabile.

Risoluzione della omogenea associata

Bisogna scrivere un'equazione in una particolare variabile, (ad esempio chiamata Z), con la quale si costruisce la così detta equazione caratteristica associata.

posto $Z = \frac{dV_c(t)}{dt}$ sostituendo si ottiene:

$$\boxed{Z + \frac{1}{\tau} = 0}$$

difatti, mostrando tutti i passaggi si ha:

$$\underbrace{\frac{dV_c(t)}{dt}}_{Z} + \frac{1}{\tau} \underbrace{V_c}_{1} = 0$$

$$\boxed{Z = -\frac{1}{\tau}}$$

Se il circuito è capacitivo $\tau = RC$ se il circuito è induttivo è $\frac{L}{R} = \tau$.

$$\boxed{V_{co}(t) = A e^{-\frac{t}{\tau}}}$$

AVRÀ PRATICAMENTE SEMPRE QUESTA FORMA

Si deve ora ricavare la costante di integrazione A.
dalla soluzione dell'equazione differenziale, sostituendo:

$$\underbrace{V_c(0^+) = V_{cp}(0^+)}_{\text{vale zero perché è omogenea (non è zero se non lo è)}} + \underbrace{V_{co}(0^+)}_{\text{vale } Ae^{-\frac{t}{\tau}}}$$

dove τ sarà induttiva o capacitiva a seconda della topologia della rete.

$V_c(0^+)$ è noto perché spesso corrisponde al dato iniziale ricavato tramite LKT per $t=0$

si ha: $\boxed{V_c(t) = V_{co}(0^+)}$

non compare V_{cp} perché nullo a causa dell'ipotesi che è omogenea.

quindi $V_c(t) = Ae^{-\frac{t}{\tau}}$

Poi vanno utilizzati questi risultati per "Sostituzione" nell'equazione differenziale di partenza.

Se ad esempio in un nodo si era scritta LKC in cui compariva la corrente in un condensatore:

$$i_c(t) = c\frac{dV_c}{dt}$$

Visto che genericamente stavamo con l'equ. diff. cercando la tensione su C, e l'equaz. stessa ci ha restituito la sua espressione come $Ae^{-\frac{t}{\tau_c}}$ possiamo sostituire

$$\boxed{i_c(t) = c\frac{d\,Ae^{-\frac{t}{\tau}}}{dt}}$$

La costante di tempo τ è stata restituita dall'eq. diff. precedente come anche la costante di integrazione A, quindi il problema è risolto eseguendo una semplice derivata.

EQUAZIONE DIFFERENZIALE OMOGENEA (IN CORRENTE O IN TENSIONE) DEL SECONDO ORDINE

nei casi in cui vi siano generatori impulsivi che governano la rete, o particolari condizioni topologiche, o morfologia della rete, l'equazione differenziale può risultare del secondo ordine.

in ogni caso, nello studio per $t=0$ (quindi nell'evento critico) si scrivano e LKC a tutti i nodi e le LKT a tutte le maglie della rete ridotta per le tensioni impulsive o le correnti impulsive.

Le citate LKT e LKC potranno, con opportune sostituzioni trasformarsi in equazioni differenziali

supponiamo che una corrente resistiva da una LKC sia capacitiva, ovvero del tipo sottoindicato all'istante critico:

$$\boxed{i_c(t) = C\frac{dV_c}{dt}}$$

oppure una tensione induttiva all'istante critico sia del tipo:

$$\boxed{V_L(t) = L\frac{di_L}{dt}}$$

supponiamo che l'equazione differenziale generata da LKT a una maglia sia ibrida induttiva/capacitiva.

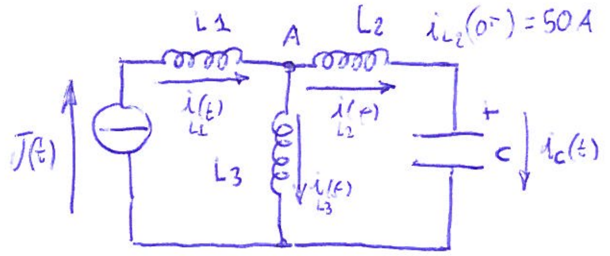
$$V_{L_3}(t) = V_{L_2}(t) + V_C(t)$$

Sostituiamo le espressioni delle tensioni sugli induttori:

$$\boxed{L_3 \frac{d i_{L3}}{dt} = L_2 \frac{d i_{L2}}{dt} + V_c(t)}$$

questa è la stessa LKT precedente ma scritta in termini differenziali.

Si supponga che il circuito che la origina sia il sottostante:



$$i_{L2}(t) = i_c(t)$$

difatti sono in serie quindi

$$i_{L2}(t) = i_c(t) = C \frac{dV_c}{dt}$$

Eseguendo LKC al nodo A ottengo:

$$i_{L3}(t) = J(t) - i_{L2}(t)$$

Benché sia un caso particolare si verifica spesso, ogni volta che si ha una serie L, C.

questa espressione potrà essere sostituita nell'equazione differenziale iniziale in modo da poterla esprimere tutta in $i_{L2}(t)$ (questo è l'obbiettivo).

$$\boxed{L_3 \frac{d\left(J(t) - i_{L2}(t)\right)}{dt} = L_2 \frac{d i_{L2}(t)}{dt} + V_c(t)}$$

ora si deve esprimere $V_c(t)$ in funzione di $i_{L2}(t)$, questo è possibile, ma come visto sopra la funzione della corrente è pari alla derivata e non alla funzione diretta.
Questo è un finto ostacolo, infatti basterà derivare ogni membro come previsto dalle regole di risoluzione delle equazioni.
Ovviamente si dovrà moltiplicare anche per C.

$= i_{L2}(t)$

$$\boxed{C L_3 \frac{d\left(d J(t) + i_{L2}(t)\right)}{dt^2} = C L_2 \frac{d\left(d i_{L2}(t)\right)}{dt^2} = C \frac{dV_c(t)}{d}}$$

$$CL_3 \frac{d\left(\overset{\text{J è costante}}{0} - d\, i_{L2}(t)\right)}{dt^2} = L_2 \frac{d\, C \frac{dV_c}{dt}}{dt} + V_c(t)$$

i_{L2} $\qquad \frac{C\, dV_c}{dt} = i_{L2}$

$$-CL_3 \frac{d^2 i_{L2}(t)}{dt^2} = CL_2 \frac{d^2 i_{L2}}{dt^2} + i_{L2}(t)$$

$$-CL_3 \frac{d^2 i_{L2}(t)}{dt^2} - C_{L2} \frac{d^2 i_{L2}}{dt^2} - i_{L2}(t) = 0$$

ora si raccoglie la derivata seconda e si cambiano tutti i segni.

$$\frac{d^2 i_{L2}}{dt^2}\left(CL_3 + CL_2\right) + i_{L2}(t) = 0$$

raccolgo ache C

$$\boxed{d^2 \frac{i_{L2}}{dt}\, C\left(L_3 + L_1\right) + i_{L2}(t) = 0}$$

EQUAZIONE DIFFERENZIALE OMOGENEA NON LINEARE DEL SECONDO ORDINE.

La soluzione è data dalla somma dell'integrale particolare con l'integrale dell'omogenea associata.

$$\boxed{i_{L2}(t) = i_{L2\,p} + i_{L2\,0}}$$

l'integrale particolare si trova ponendo uguale a zero la derivata prima quindi $\frac{d\, i_{L2}(t)}{dt} = 0$

se la derivata prima è nulla lo è anche la derivata seconda, quindi:

$$\emptyset \cdot C(L_3 + L_1) + i_{L2}(t) = 0 \Rightarrow i_{L2}(t) = 0 \Rightarrow \boxed{i_{L2\,p}(t) = 0}$$

La soluzione dell'omogenea associata si trova risolvendo l'equazione CARATTERISTICA ASSOCIATA, che si ricava ponendo la derivata prima della funzione incognita pari alla variabile fittizia Z.

quindi l'equazione diventa:

da → $\boxed{C(L_2+L_3)\dfrac{d^2 i_{L2}(t)}{dt^2} + i_{L2}(t)}$ a → $\boxed{C(L_2+L_3)Z^2+1=0}$

difatti si ha che $i_{L2}(0) = \dfrac{d^0 i_{L2}(t)}{dt^0}$ è cioè la derivata di ordine zero, quindi posso sostituire la funzione con la derivata di quell'ordine

$$\frac{d^0 i_{L2}(t)}{dt^0} = Z^0 = +1$$

ora ricavo Z risolvendo l'equazione algebrica.

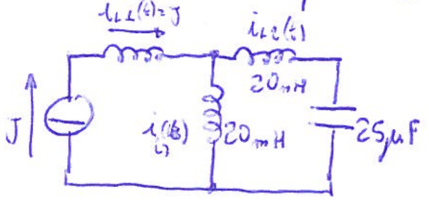
$$\boxed{Z^2 = \frac{-1}{C(L_2+L_3)}} \Rightarrow \boxed{Z = \sqrt{\frac{-1}{C(L_2+L_3)}}}$$

compare una radice di un valore negativo che ammette, come è noto, soluzione in campo complesso.

Si ottengono due valori complessi coniugati puramente immaginari

$$Z_{1,2} = \pm J\frac{1}{\sqrt{C(L_2+L_3)}} = \pm J\omega_0 = \pm J\,1000\ \frac{rad}{sec}$$

Dove il risultato dipende numericamente dal fatto che la rete in cui si è ricavata l'equazione differenziale era la sottostante:



quindi $\dfrac{1}{\sqrt{25_{\mu F}(20_{mH}+20_{mH})}} = \dfrac{1}{\sqrt{\left(\frac{25}{1000000}\right)\left(\frac{40}{1000}\right)}} = 1000$ è il tipo di equazione diff. che gli da significato di pulsazione angolare

L'integrale generale dell'omogenea associata è quindi

$$\boxed{i_{L20}(t) = A\cos(\omega_0 t) + B\,\text{sen}(\omega_0 t)}$$

Si procede con il calcolo delle costanti di integrazione A e B imponendo il valore iniziale di i_{L2} (trovato con lo studio della rete in $t=0$).

esso valeva $50[A]$ $\qquad i_{L2}(0^+) = 50[A]$

$$i_{L2}(0^+) = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{integr. particolare}}}{i_{L2f}(0^+)} + \underset{\substack{\uparrow \\ \text{integrale omogenea associata..}}}{i_{L20}(0^+)}$$

Quando è indicato (0^+) si deve sostituire il valore 0 alla variabile t, ovvero valutare le espressioni in zero il che non significa che risultino nulle.

Per l'omogenea associata quindi

$$\boxed{i_{L20}(0^+) = A\cos(\omega^\circ 0^+) + B\,\text{sen}(\omega^\circ(0^+))}$$

$$i_{L20}(0^+) = A\underbrace{\cos 0}_{1} + \underbrace{B\,\text{sen}\,0}_{0} \quad \Rightarrow \quad \boxed{i_{L20}(0^+) = A}$$

Sostituendo nell'integrale generale si ha:

$$i_{L2}(0^+) = 0 + A \qquad \text{quindi } i_{L2}(0^+) = 50[A]$$

Per calcolare la seconda costante di integrazione B si riprende l'equazione

$$L_3\frac{di_{L3}(t)}{dt} = L_2\frac{di_{L2}(t)}{dt} + V_c(t)$$

tenendo conto che risultava da precenti sviluppi al nodo

$$\frac{d i_{L3}}{dt} = -\frac{d i_{L2}}{dt}$$ si ricava:

$$V_c(t) = -(L_2+L_3)\frac{d i_{L2}(t)}{dt} \Rightarrow \boxed{\frac{d i_{L2}(t)}{dt} = -\frac{V_c(t)}{(L_2+L_3)}}$$

$$\left.\frac{d i_{L2}}{dt}\right|_{0^+} = -\frac{V_c(0^+)}{(L_2+L_3)} = 0$$

PARTICOLARE

OMOGENEA ASSOCIATA

quindi $$\left.\frac{d i_{L2}}{dt}\right|_{0^+} = \underbrace{\left.\frac{d i_{L2P}}{dt}\right|_{0^+}}_{\text{nulla}} + \left.\frac{d i_{L2O}}{dt}\right|_{0^+}$$

$$= \left.\frac{d i_{L2O}}{dt}\right|_{0^+}$$

Quindi per trovare la costante di integrazione B devo derivare l'espressione di $i_{L2O}(t)$ e poi valutarla ancora in 0^+.

$$\frac{d i_{L2O}(t)}{dt} = \frac{d(A\cos\omega_0 t + B\operatorname{sen}\omega_0 t)}{dt}$$

$$= -\omega_0 A\operatorname{sen}(\omega t) + B\omega\cos(\omega t)$$

che valutata in 0^+, ovvero sostituendo 0 a t da

$$\left.\frac{d i_{L2}}{dt}\right|_{0^+} = -\omega_0 A\operatorname{sen} 0 + B\omega_0\cos 0$$

$$= -\omega_0\,\emptyset + B\omega_0\,1 = B\omega_0$$

Ricavo ora B con un passaggio algebrico

$$B = \frac{1}{\omega_0} \cdot \frac{d i_{L_2 0}}{dt}$$

visto che $\frac{d i_{L_2 0}}{dt}$ era stata valutata così $\frac{d i_{L_2 0}}{dt} = \frac{V_C(0^+)}{L_2 + L_3} = q(1)$

$$B = -\frac{1}{\omega_0} \frac{V_C(0^+)}{L_1 + L_3} = 0 \qquad \text{quindi } B = 0$$

Riprendiamo ora l'integrale generale dell'equazione differenziale e sostituiamo i valori così trovati:

$$i_{L2}(t) = \underbrace{i_{L2\,p}(t)}_{\text{vale } \emptyset} + \overbrace{i_{L20}(t)}^{\text{vale } A\cos(\omega_0 t) + B\,\mathrm{sen}(\omega_0 t)}$$

con $\omega_0 = 1000 \frac{rad}{sec}$

$A = 50\ A$

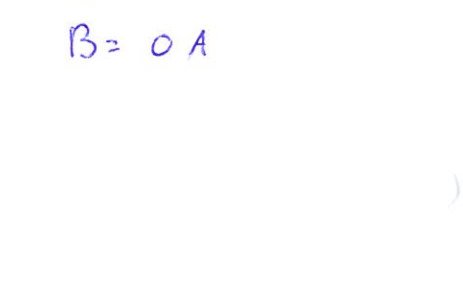
$B = 0\ A$

Eseguendo la sostituzione:

$$i_{L2}(t) = 0 + A\cos\omega_0 t$$

dalla equazione di Kirchhoff alla maglia V_J, L_1, L_3 si può ricavare

$$V_{L3}(t) = L_3 \frac{d(J - i_{L2})}{dt} = -L_3 \frac{d i_{L2}}{dt} = 50 L_3 \omega_0 \,\mathrm{sen}\,\omega_0 t = 1000\,\mathrm{sen}\,1000t$$



$V_{L1} = 0$
Perchè vi è
J = costante
$V_L = L \cdot \frac{di_L}{dt}$
e $i_L = J$ = cost

$\Delta \delta_0(t) = 1{,}5\delta_0$

LKT

vale quindi $V_J(t) = V_{L3} + V_{L1} = V_{L3} = 1000\,\mathrm{sen}\,1000t$ a cui si aggiunge l'eventuale addendo impulsivo