Elettrotecnica

22 Reti in regime variabile aperiodico

Analisi in evoluzione continua

Nei regimi variabili aperiodici tensioni e correnti non assumono andamenti di tipo prestabilito (come nei regimi stazionario e periodico)

⇨ possono variare secondo qualsiasi andamento consentito dalle **leggi topologiche** (LKC e LKT) e **tipologiche** degli n-poli che compongono la rete.

Si assume per ora che non presentino discontinuità, le quali saranno esaminate successivamente.

Esempi

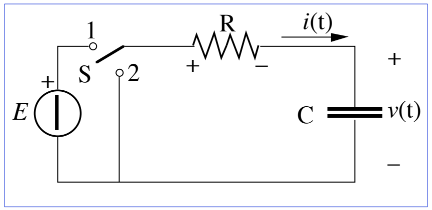
Si inizia l'esame con 2 esempi, che costituiscono casi semplici ed importanti di reti in regime varialibe aperiodico:

la carica e scarica di condensatore ed induttore .

Carica del condensatore -1

Per t<0 S è in 2 e il circuito a destra è a riposo

In t=0 S commuta in 1



$$
\begin{array}{lll}
\text{LKT}: & v_R(t) + v(t) = E & \\
+\,\text{R}: & v_R(t) = \text{R}\, i_R(t) & \Rightarrow\ \text{R}\, i_R(t) + v(t) = E \\
+\,\text{LKC}: & i_R(t) = i(t) & \Rightarrow\ \text{R}\, i(t) + v(t) = E \\
+\,\text{C}: & i(t) = \text{C}\; \text{d}v(t)/\text{dt} & \\
\Rightarrow & \quad \text{R C}\; \text{d}v(t)/\text{dt} + v(t) = E &
\end{array}
$$

equazione differenziale lineare di primo grado a coefficienti costanti

Carica del condensatore -2

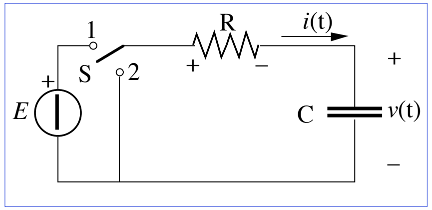
<u>*Integrale particolare*</u>:

$v_p(t) = V_p$

costante, come il t.n. E;

sostituendo:

$v_p(t) = V_p = E$



<u>*Integrale dell'omogenea*</u>:

e.c.a. RC $s + 1 = 0$ $\qquad s = -\dfrac{1}{\mathrm{RC}}$ $[s^{-1}]$

si preferisce usare $\mathrm{T} = -\dfrac{1}{s} = \mathrm{RC}$ [s] **costante di tempo**

per cui $\qquad v_o(t) = V_o\, e^{st} = V_o\, e^{-\frac{t}{T}}$

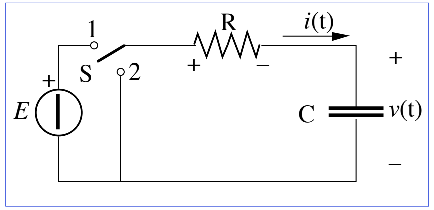
Carica del condensatore -3

<u>*Integrale completo*</u>:

$v(t) = v_p(t) + v_o(t)$

$v(t) = E + V_o\, e^{-\frac{t}{T}}$

<u>*Costante di integrazione* V_o</u>:



imponendo il valore iniziale, noto $v(0) = 0$

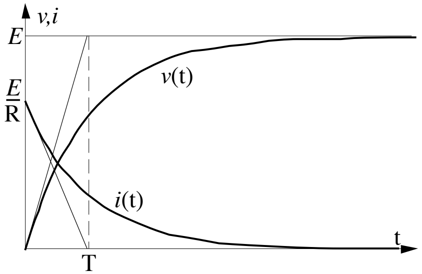
$0 = v_p(0) + v_o(0) = E + V_o \qquad ➩ \qquad V_o = -E$

infine $\qquad v(t) = E\left(1 - e^{-\frac{t}{T}}\right)$

Carica del condensatore -4

Da $v(t)$ si ottiene $i(t)$

$$i(t) = C\frac{dv(t)}{dt} = \frac{E}{R}\, e^{-\frac{t}{T}}$$



Altre uscite:

$v_R(t) = R\,i(t)$ e $\vartheta(t)$

$$\vartheta(t) = C\,v(t) = C\,E\left(1 - e^{-\frac{t}{T}}\right) = \Theta\left(1 - e^{-\frac{t}{T}}\right)$$

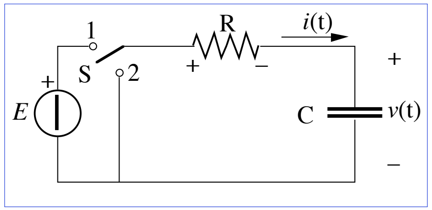
Tutte dipendono dalla stessa T: la differenza rispetto agli asintoti è del 1,8% dopo 4T e del 0,4% dopo 5T

➩ a tal punto il transitorio è *praticamente* concluso

Scarica del condensatore -1

Per t<0 S è in 1 e il condensatore è carico a $v(t) = E$

In t=0 S commuta in 2



LKT :	$v_R(t) + v(t) = 0$	
+ R :	$v_R(t) = R\,i_R(t)$	$\Rightarrow\ R\,i_R(t) + v(t) = 0$
+ LKC :	$i_R(t) = i(t)$	$\Rightarrow\ R\,i(t) + v(t) = 0$
+ C :	$i(t) = C\,dv(t)/dt$	

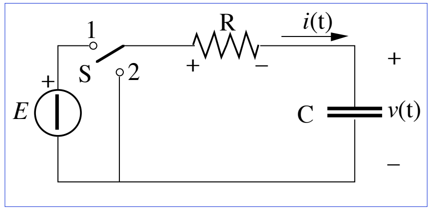
$\Rightarrow \qquad R\,C\,dv(t)/dt + v(t) = 0$

equazione differenziale lineare di primo grado a coefficienti costanti omogenea

Scarica del condensatore -2

<u>*Integrale particolare*</u>:

$v_p(t) = 0$



<u>*Integrale dell'omogenea*</u>:

e.c.a. $\quad \mathrm{RC}\, s + 1 = 0 \qquad s = -\dfrac{1}{\mathrm{RC}} \quad [\mathrm{s}^{-1}]$

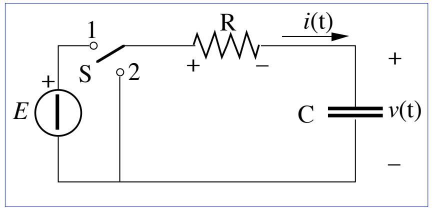
per cui $\quad v_o(t) = V_o'\, e^{st} = V_o'\, e^{-\frac{t}{T}} \qquad T = -\dfrac{1}{s} = \mathrm{RC} \quad [\mathrm{s}]$

Scarica del condensatore -3

<u>*Integrale completo*</u>:

$v(t) = v_p(t) + v_o(t)$

$$v(t) = V_o'\, e^{-\frac{t}{T}}$$



<u>*Costante di integrazione*</u> V_o:

imponendo il valore iniziale, noto $v(0) = E$

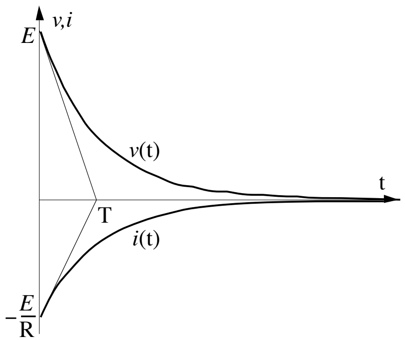
$E = v_p(0) + v_o(0) = 0 + V_o' \quad \Rightarrow \quad V_o' = E$

infine $\quad v(t) = E\, e^{-\frac{t}{T}}$

Scarica del condensatore -4

Da $v(t)$ si ottiene $i(t)$

$$i(t) = \mathrm{C}\frac{dv(t)}{dt} = -\frac{E}{\mathrm{R}}\, e^{-\frac{t}{T}}$$



Altre uscite:

$v_R(t) = \mathrm{R}i(t) \quad$ e $\quad \vartheta(t)$

$$\vartheta(t) = \mathrm{C}\, v(t) = \mathrm{C}E\, e^{-\frac{t}{T}} = \Theta\, e^{-\frac{t}{T}}$$

Scambi energetici

Durante la carica

$$\Delta L_C = W_C - 0 = W_C = \frac{1}{2}\mathrm{C}E^2 = \frac{1}{2}E\Theta = \frac{1}{2}\frac{\Theta^2}{\mathrm{C}}$$

$$\Delta L_g = \int_0^\infty E\, i\, dt = E\int_0^\infty i\, dt = E\Theta$$

$$\Delta L_R = \Delta L_g - \Delta L_C = \frac{1}{2}E\Theta$$

Durante la scarica

$$\Delta L_{Ce} = -\Delta L_C = W_C - 0 = W_C = \frac{1}{2}\mathrm{C}E^2 = \frac{1}{2}E\Theta = \frac{1}{2}\frac{\Theta^2}{\mathrm{C}} = \Delta L_R$$

Dipendenza da R -1

Non dipendono da R:

La tensione di carica del condensatore $V=E$

L'energia immagazzinata $W_C=CV^2/2$

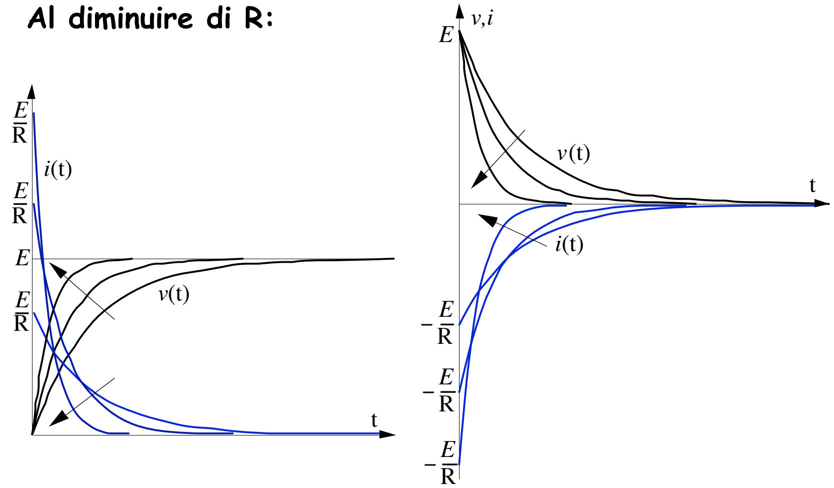
Dipendono da R:

La costante di tempo, $T=RC$ e quindi la velocità di carica/scarica

Il valore massimo della corrente $I=E/R$

Dipendenza da R -2

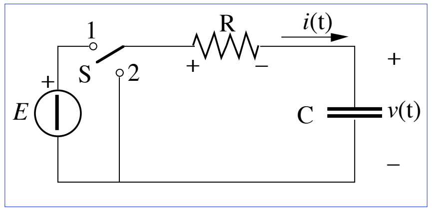
Al diminuire di R:



Evoluzione di condensatore precaricato -1

Per t<0 S è in 2 e il condensatore è carico a tensione V

In t=0 S commuta in 1



LKT :	$v_R(t) + v(t) = E$		
+ R :	$v_R(t) = R\, i_R(t)$	$\Rightarrow$	$R\, i_R(t) + v(t) = E$
+ LKC :	$i_R(t) = i(t)$	$\Rightarrow$	$R\, i(t) + v(t) = E$
+ C :	$i(t) = C\, dv(t)/dt$		

$$\Rightarrow \qquad RC\, dv(t)/dt + v(t) = E$$

Solita equazione differenziale lineare di primo grado a coefficienti costanti

Evoluzione di condensatore precaricato -2

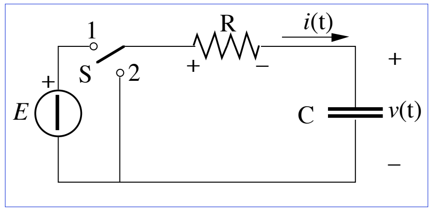
Integrale particolare:

$v_p(t) = V_p$

costante, come il t.n. E;

sostituendo:

$v_p(t) = V_p = E$



Integrale dell'omogenea:

e.c.a. $\qquad RC\, s + 1 = 0 \qquad s = -\frac{1}{RC} \quad [s^{-1}]$

si preferisce usare $\quad T = -\frac{1}{s} = RC \quad [s] \qquad$ **costante di tempo**

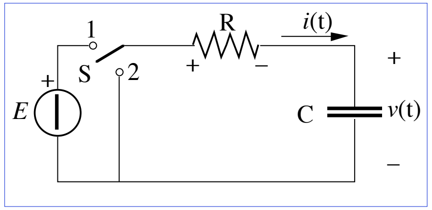
per cui $\qquad v_o(t) = V_o\, e^{s\,t} = V_o\, e^{-\frac{t}{T}}$

Evoluzione di condensatore precaricato -3

<u>*Integrale completo*</u>:

$v(t) = v_p(t) + v_o(t)$

$v(t) = E + V_o\, e^{-\frac{t}{T}}$



<u>*Costante di integrazione*</u> V_o:

imponendo il valore iniziale, noto $v(0) = V$

$V = v_p(0) + v_o(0) = E + V_o \quad \Rightarrow \quad V_o = V - E$

infine $\quad v(t) = E + (V - E)\, e^{-\frac{t}{T}}$

Evoluzione di condensatore precaricato -4

In definitiva l'uscita o risposta $v(t)$ è:

$$v(t) = E + (V - E)\, e^{-\frac{t}{T}} = v_p(t) + v_o(t)$$

che si può scrivere anche come:

$$v(t) = E\left(1 - e^{-\frac{t}{T}}\right) + V e^{-\frac{t}{T}} = v_{s.z.}(t) + v_{i.n.}(t)$$

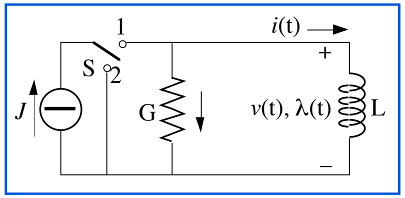
$v_{s.z.}(t)$ = **risposta da stato zero**, dovuta al solo ingresso E, = risposta totale se la rete parte da stato zero: $V=0$

$v_{i.n.}(t)$ = **risposta da ingresso nullo**, dovuta al solo stato iniziale V, = risposta tot. se non ci sono ingressi: $E=0$

Carica dell'induttore -1

Per t<0 S è in 2 e il circuito a destra è a riposo

In t=0 S commuta in 1



$$\begin{array}{lll}
\text{LKC}: & i_R(t) + i(t) = J & \\
+\text{R}: & i_R(t) = G\, v_R(t) & \Rightarrow \; G\, v_R(t) + i(t) = J \\
+\text{LKT}: & v_R(t) = v(t) & \Rightarrow \; G\, v(t) + i(t) = J \\
+\text{L}: & v(t) = L\, di(t)/dt & \\
\Rightarrow & \quad GL\, di(t)/dt + i(t) = J &
\end{array}$$

equazione differenziale lineare di primo grado a coefficienti costanti

Carica dell'induttore -2

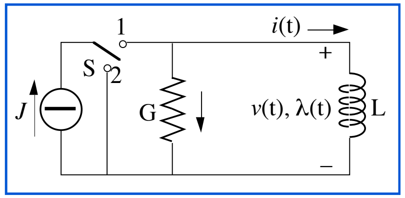
<u>Integrale particolare</u>:

$i_p(t) = I_p$

costante, come il t.n. J;

sostituendo:

$i_p(t) = I_p = J$



<u>Integrale dell'omogenea</u>:

e.c.a. $\quad GL\, s + 1 = 0 \qquad s = -\frac{1}{GL} = -\frac{R}{L} \quad [s^{-1}]$

si preferisce usare $T = -\frac{1}{s} = LG = \frac{L}{R}$ [s] **costante di tempo**

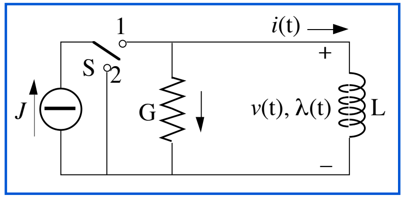
per cui $\quad i_o(t) = I_o\, e^{st} = I_o\, e^{-\frac{t}{T}}$

Carica dell'induttore -3

Integrale completo:

$i(t) = i_p(t) + i_o(t)$

$$i(t) = J + I_o\, e^{-\frac{t}{T}}$$



Costante di integrazione I_o:

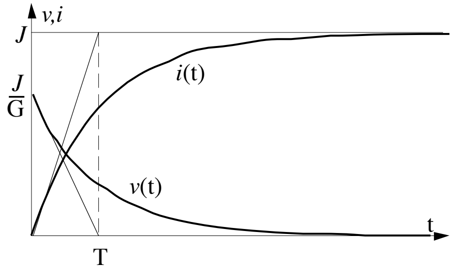
imponendo il valore iniziale, noto $i(0) = 0$

$0 = i_p(0) + i_o(0) = J + I_o \quad ⇨ \quad I_o = -J$

infine $\quad i(t) = J\left(1 - e^{-\frac{t}{T}}\right)$

Carica dell'induttore -4

Da $i(t)$ si ottiene $v(t)$



$$v(t) = L\frac{di(t)}{dt} = \frac{J}{G}\, e^{-\frac{t}{T}}$$

Altre uscite:

$i_R(t) = G v(t)$ e $\lambda(t)$

$$\lambda(t) = L\, i(t) = L\, J\left(1 - e^{-\frac{t}{T}}\right) = \Lambda\left(1 - e^{-\frac{t}{T}}\right)$$

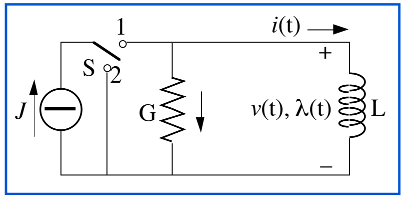
Tutte dipendono dalla stessa T: la differenza rispetto agli asintoti è del 1,8% dopo 4T e del 0,4% dopo 5T

⇨ a tal punto il transitorio è *praticamente* concluso

Scarica dell'induttore -1

Per t<0 S è in 1 e l'induttore è carico a $i(t) = J$

In t=0 S commuta in 2



LKC : $\quad i_R(t) + i(t) = 0$

+ R : $\quad i_R(t) = G\, v_R(t) \quad \Rightarrow \quad G\, v_R(t) + i(t) = 0$

+ LKT : $\quad v_R(t) = v(t) \quad \Rightarrow \quad G\, v(t) + i(t) = 0$

+ L : $\quad v(t) = L\, di(t)/dt$

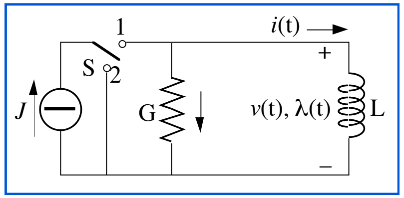
$\Rightarrow \qquad GL\, di(t)/dt + i(t) = 0$

equazione differenziale lineare di primo grado a coefficienti costanti omogenea

Scarica dell'induttore -2

Integrale particolare:

$i_p(t) = 0$



Integrale dell'omogenea:

e.c.a. $\qquad GL\, s + 1 = 0 \qquad s = -\dfrac{1}{GL} \quad [s^{-1}]$

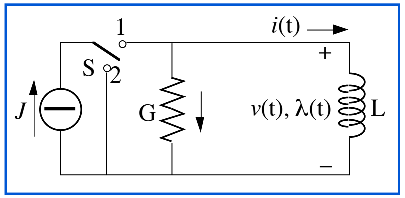
per cui $\qquad i_o(t) = I_o'\, e^{st} = I_o'\, e^{-\frac{t}{T}} \qquad T = -\frac{1}{s} = \frac{L}{R} \quad [s]$

Scarica dell'induttore -3

Integrale completo:

$i(t) = i_p(t) + i_o(t)$

$$i(t) = I_o' \, e^{-\frac{t}{T}}$$



Costante di integrazione I_o':

imponendo il valore iniziale, noto $i(0) = J$

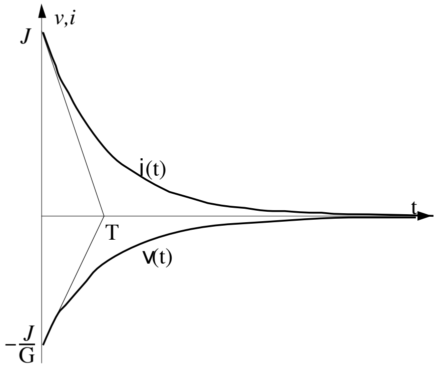
$J = i_p(0) + i_o(0) = 0 + I_o'$ ⇨ $I_o' = J$

infine $\quad i(t) = J \, e^{-\frac{t}{T}}$

Scarica dell'induttore -4

Da $i(t)$ si ottiene $v(t)$

$$v(t) = L\frac{di(t)}{dt} = -\frac{J}{G}\, e^{-\frac{t}{T}}$$



Altre uscite:

$i_R(t) = Gv(t)$ e $\lambda(t)$

$$\lambda(t) = L\,i(t) = LJ\, e^{-\frac{t}{T}} = \Lambda\, e^{-\frac{t}{T}}$$

Scambi energetici

Durante la carica

$$\Delta L_L = W_L - 0 = W_L = \frac{1}{2} L J^2 = \frac{1}{2} J \Lambda = \frac{1}{2}\frac{\Lambda^2}{L}$$

$$\Delta L_g = \int_0^\infty J\, v\, dt = J\int_0^\infty v\, dt = J\Lambda$$

$$\Delta L_R = \Delta L_g - \Delta L_L = \frac{1}{2} J\Lambda$$

Durante la scarica

$$\Delta L_{Le} = -\Delta L_L = W_L - 0 = W_L = \frac{1}{2} L J^2 = \frac{1}{2} J\Lambda = \frac{1}{2}\frac{\Lambda^2}{L} = \Delta L_R$$

Dipendenza da R -1

Non dipendono da R (o G):

La corrente di carica dell'induttore $I=J$

L'energia immagazzinata $W_L = LI^2/2$

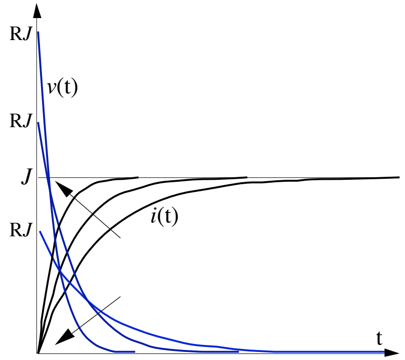
Dipendono da R (o G):

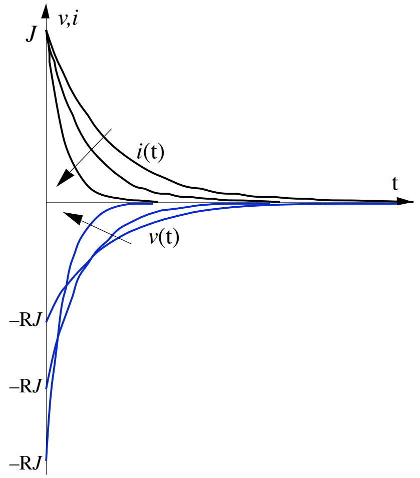
La costante di tempo, $T=LG=L/R$ e quindi la velocità di carica/scarica

Il valore massimo della tensione $V=J/G=RJ$

Dipendenza da R -2

All'aumentare di R (diminuire di G):

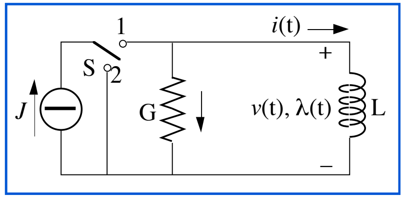




Evoluzione di induttore precaricato -1

Per t<0 S è in 2 e l'induttore è carico a corrente I

In t=0 S commuta in 1



LKC :	$i_R(t) + i(t) = J$		
+ R :	$i_R(t) = G\, v_R(t)$	$\Rightarrow$	$G\, v_R(t) + i(t) = J$
+ LKT :	$v_R(t) = v(t)$	$\Rightarrow$	$G\, v(t) + i(t) = J$
+ L :	$v(t) = L\, di(t)/dt$		
$\Rightarrow$		$GL\, di(t)/dt + i(t) = J$	

Solita equazione differenziale lineare di primo grado a coefficienti costanti

Evoluzione di induttore precaricato -2

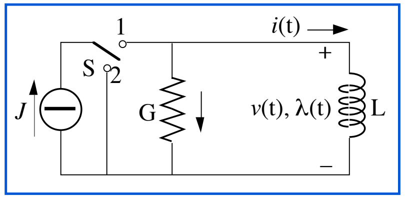
<ins>*Integrale particolare*</ins>:

$i_p(t) = I_p$

costante, come il t.n. J;

sostituendo:

$i_p(t) = I_p = J$



<ins>*Integrale dell'omogenea*</ins>:

e.c.a. $\quad GL\, s + 1 = 0 \qquad s = -\dfrac{1}{GL} = -\dfrac{R}{L} \quad [s^{-1}]$

si preferisce usare $\quad T = -\dfrac{1}{s} = LG = \dfrac{L}{R} \quad [s]$ **costante di tempo**

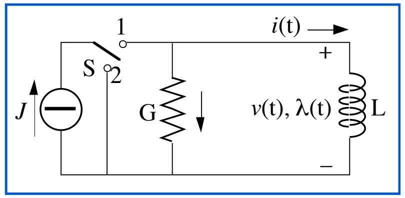
per cui $\quad i_o(t) = I_o\, e^{st} = I_o\, e^{-\frac{t}{T}}$

Evoluzione di induttore precaricato -3

<ins>*Integrale completo*</ins>:

$i(t) = i_p(t) + i_o(t)$

$$i(t) = J + I_o\, e^{-\frac{t}{T}}$$



<ins>*Costante di integrazione*</ins> I_o:

imponendo il valore iniziale, noto $i(0) = I$

$I = i_p(0) + i_o(0) = J + I_o \quad ➪ \quad I_o = I - J$

infine $\quad i(t) = J + (I - J)\, e^{-\frac{t}{T}}$

Evoluzione di induttore precaricato -4

In definitiva l'uscita o risposta $i(\mathrm{t})$ è:

$$i(\mathrm{t}) = J + (I - J)\, e^{-\frac{\mathrm{t}}{\mathrm{T}}} = i_{\mathrm{p}}(\mathrm{t}) + i_{\mathrm{o}}(\mathrm{t})$$

che si può scrivere anche come:

$$i(\mathrm{t}) = J\left(1 - e^{-\frac{\mathrm{t}}{\mathrm{T}}}\right) + I\, e^{-\frac{\mathrm{t}}{\mathrm{T}}} = i_{\mathrm{s.z.}}(\mathrm{t}) + i_{\mathrm{i.n.}}(\mathrm{t})$$

$i_{\mathrm{s.z.}}(\mathrm{t})$ = **risposta da stato zero**, dovuta al solo ingresso J,
= risposta totale se la rete parte da stato zero: I=0

$i_{\mathrm{i.n.}}(\mathrm{t})$ = **risposta da ingresso nullo**, dovuta al solo stato iniziale I, = risposta tot. se non ci sono ingressi: J=0

Strategia solutiva -1

Come visto negli esempi presentati

1) Si usa il sistema di equazioni generali completo (tipologiche e topologiche) di rete

2) Si ricava da esso un'equazione "separata" per l'uscita desiderata

$$\begin{cases} v(\mathrm{t}) = e(\mathrm{t}) \\ i(\mathrm{t}) = j(\mathrm{t}) \\ v(\mathrm{t}) - \mathrm{R}\, i(\mathrm{t}) = 0 \\ \mathrm{C}\dfrac{\mathrm{d}\, v(\mathrm{t})}{\mathrm{dt}} - i(\mathrm{t}) = 0 \\ v(\mathrm{t}) - \mathrm{L}\dfrac{\mathrm{d}\, i(\mathrm{t})}{\mathrm{dt}} = 0 \\ \sum \pm i(\mathrm{t}) = 0 \\ \sum \pm v(\mathrm{t}) = 0 \end{cases}$$

Strategia solutiva -2

Se l'uscita dipende da un solo ingresso si ottiene:

$$\sum_{\mathrm{i}=0}^{\mathrm{n}} \mathrm{a_i} \frac{\mathrm{d^i}\, y_{\mathrm{h}}(\mathrm{t})}{\mathrm{dt^i}} = \sum_{\mathrm{i}=0}^{\mathrm{m_k}} \mathrm{b_i} \frac{\mathrm{d^i}\, u_{\mathrm{k}}(\mathrm{t})}{\mathrm{dt^i}}$$

ossia:

$$\mathrm{a_n}\frac{\mathrm{d^n}\, y_{\mathrm{h}}(\mathrm{t})}{\mathrm{dt^n}} + \cdots + \mathrm{a_1}\frac{\mathrm{d}\, y_{\mathrm{h}}(\mathrm{t})}{\mathrm{dt}} + \mathrm{a_0}\, y_{\mathrm{h}}(\mathrm{t}) = \mathrm{b_m}\frac{\mathrm{d^m}\, u_{\mathrm{k}}(\mathrm{t})}{\mathrm{dt^m}} + \cdots + \mathrm{b_1}\frac{\mathrm{d}\, u_{\mathrm{k}}(\mathrm{t})}{\mathrm{dt}} + \mathrm{b_0}\, u_{\mathrm{k}}(\mathrm{t})$$

Se l'uscita dipende da un più ingressi si ottiene:

$$\sum_{\mathrm{i}=0}^{\mathrm{n}} \mathrm{a_i} \frac{\mathrm{d^i}\, y_{\mathrm{h}}(\mathrm{t})}{\mathrm{dt^i}} = \sum_{\mathrm{k}=1}^{\mathrm{q_h}} \sum_{\mathrm{i}=0}^{\mathrm{m_k}} \mathrm{b_i} \frac{\mathrm{d^i}\, u_{\mathrm{k}}(\mathrm{t})}{\mathrm{dt^i}}$$

Osservazioni

1) L'uscita incognita è a primo membro; i coefficienti $\mathrm{a_i}$ (e $\mathrm{b_i}$) sono funzioni della **rete inerte** (R, L, C e loro connessioni)

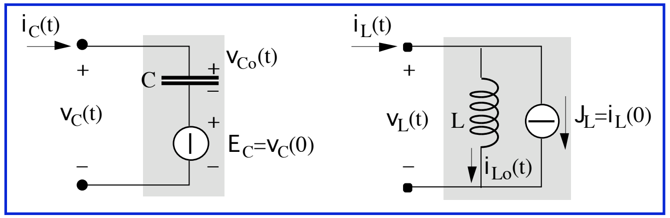
2) I secondi membri costituiscono i termini noti: sono funzioni note degli ingressi $u_{\mathrm{k}}(\mathrm{t})$ [$e(\mathrm{t})$ e $j(\mathrm{t})$]

3) Il grado n è sempre minore o uguale al numero p di variabili di stato presenti nella rete

4) La soluzione dipende anche dalle condizioni iniziali [$v(0)$ dei condensatori e $i(0)$ degli induttori]

Valori iniziali

Gli schemi linearizzati visti a suo tempo



- sostituiscono i valori iniziali con ingressi fittizi U_k [E e J]
- giustificano l'applicazione della sovrapposizione degli effetti,
- mostrano che i valori iniziali hanno "effetti" analoghi agli ingressi originali

Soluzione -1

L'uscita o risposta y(t), soluzione dell'e.d.o.

$$\sum_{i=0}^{n} a_i \frac{d^i y(t)}{dt^i} = \sum_{k=1}^{q} \sum_{i=0}^{m_k} b_i \frac{d^i u_k(t)}{dt^i} = f(t)$$

si ottiene come somma di integrale particolare e integrale dell'omogenea:

$$y(t) = y_p(t) + y_o(t)$$

Soluzione -2

ma può esprimersi anche, per la sovrapposizione degli effetti, come:

$$y(t) = y_{s.z.}(t) + y_{i.n.}(t)$$

ove:

$y_{s.z.}(t)$ = **risposta da stato zero**, dovuta ai soli **ingressi originali** $e(t)$ e $j(t)$ (con valori iniziali nulli);

$y_{i.n.}(t)$ = **risposta a ingresso nullo**, dovuta ai soli ingressi fittizi U_k [E e J], cioè ai **valori iniziali** [$v(0)$ dei condensatori e $i(0)$ degli induttori] (con ingressi originali nulli).

Soluzione -3

A sua volta la risposta da stato zero $y_{s.z.}(t)$ può calcolarsi come somma del suo integrale particolare e del suo integrale dell'omogenea

$$y_{s.z.}(t) = y_{s.z.p}(t) + y_{s.z.o}(t)$$

Invece la risposta a ingresso nullo $y_{i.n.}(t)$ è data dal suo solo integrale dell'omogenea

$$y_{i.n.}(t) = y_{i.n.o}(t)$$

perché il suo integrale particolare è nullo (con ingresso nullo l'equazione differenziale è omogenea).

Soluzione -4

Confrontando le precedenti relazioni

$$y(t) = y_p(t) + y_o(t)$$
$$y(t) = y_{s.z.}(t) + y_{i.n.}(t) = [y_{s.z.p}(t) + y_{s.z.o}(t)] + [y_{i.n.o}(t)]$$

si verifica che

$$y_p(t) = y_{s.z.p}(t)$$
$$y_o(t) = y_{s.z.o}(t) + y_{i.n.o}(t)$$

Integrale particolare -1

Come visto vale la sovrapposizione degli effetti
⇨ l'i.p. complessivo si può calcolare come somma degli integrali particolari $y_p(t)$ che competono a ciascun ingresso $u(t)$ che agisce da solo:

$$\sum_{i=0}^{n} a_i \frac{d^i y(t)}{dt^i} = \sum_{i=0}^{m_k} b_i \frac{d^i u(t)}{dt^i} = f(t)$$

Integrale particolare -2

INGRESSO COSTANTE

Se $u(t) = U$, costante, un integrale particolare comodo è pure di tipo costante, $y_p(t) = Y_p$; sostituendo nella e.d.o.:

$$Y_p = \frac{b_0}{a_0} U$$

è la soluzione che si avrebbe se la rete fosse in regime stazionario: si può anche determinare con i metodi di analisi delle reti in regime stazionario.

n.b.: l'analisi in regime stazionario vista a suo tempo fornisce la soluzione rapida dell'e.d.o. (valida in ogni condizione di funzionamento) nel caso particolare di grandezze tutte costanti.

Integrale particolare -3

INGRESSO SINUSOIDALE

Analogamente, se $u(t)=U_M \mathrm{sen}(\omega t+\psi)$, sinusoidale, un integrale particolare comodo è una sinusoide isofrequenziale:

$$u(t)=U_M \mathrm{sen}(\omega t+\psi) \quad ⇨ \quad y_p(t)=Y_M \mathrm{sen}(\omega t+\gamma)$$

si può calcolare per sostituzione nella e.d.o., ma conviene ricorrere ai metodi di analisi delle reti in regime sinusoidali (basati sui fasori e sulla rete simbolica).

n.b.: l'analisi di regime sinusoidale vista a suo tempo fornisce la soluzione rapida dell'e.d.o. (valida in ogni condizione di funzionamento) nel caso particolare di grandezze tutte sinusoidali.

Integrale particolare -4

INGRESSO CISOIDALE

E' del tipo:

$$u(t) = U_o e^{\sigma t} \operatorname{sen}(\omega t+\psi)$$

generalizza costanti e sinusoidi, che ne sono forme specifiche:

costante: $\sigma=0,\ \omega=0$ ⇨ $u(t) = U_o \operatorname{sen}(\psi) = U$

sinusoide: $\sigma=0,\ \omega\neq0$ ⇨ $u(t) = U_o \operatorname{sen}(\omega t+\psi)$

esiste l'integrale particolare cisoidale dello stesso tipo:

$$y_p(t) = Y_{po} e^{\sigma t} \operatorname{sen}(\omega t+\gamma)$$

STUDIO IN S -1

INGRESSO CISOIDALE

ingresso $u(t) = U_o e^{\sigma t} \operatorname{sen}(\omega t+\psi)$

l'uscita particolare $y_p(t) = Y_{po} e^{\sigma t} \operatorname{sen}(\omega t+\gamma)$

ha i medesimi coefficienti del tempo σ e ω, sintetizzabili nella FREQUENZA GENERALIZZATA (numero complesso):

$$s = \sigma + j\omega$$

(nel caso costante $s = 0$, in quello sinusoidale $s = j\omega$).

STUDIO IN S -2

Determinare $y_p(t)$ significa determinare Y_{po} e γ.

Le cisoidi hanno proprietà simili a quelle delle sinusoidi ⇨ vale il metodo simbolico generalizzato (sostituisce s a $j\omega$).

Fasori generalizzati: $u(t) \rightarrow \overline{U} = U_o e^{j\psi}$ ingresso noto

$y_p(t) \rightarrow \overline{Y}_p = Y_{po} e^{j\gamma}$ uscita incognita

Impedenze generalizzate:

R → $Z_R = R$ (reale)

L → $Z_L(s) = sL$ (complesso)

C → $Z_C(s) = 1/sC$ (complesso)

analogamente per le ammettenze Y(s).

n.b.: come in sinusoidale, con s al posto di $j\omega$.

STUDIO IN S -3

La rete simbolica generalizzata è normale ⇨ si opera con i soliti metodi e teoremi:

- serie e parallelo di impedenze e ammettenze generalizzate, partitori di tensione e corrente,
- correnti cicliche, potenziali ai nodi, Thévenin e Norton,
- …

Essi permettono di esprimere $\overline{Y}_p=Y_{po}e^{j\gamma}$ come prodotto di $\overline{U}=U_o e^{j\psi}$ per un coefficiente di rete, funzione di impedenze ed ammettenze, e quindi di s:

$$\overline{Y}_p = W(s)\,\overline{U}$$

STUDIO IN S -4

$$\overline{Y}_p = W(s)\,\overline{U}$$

è l'espressione generale della relazione ingresso-uscita nel dominio di s.

Specificamente:

ingresso / uscita	$\overline{E}$	$\overline{J}$
$\overline{V}_p$	$\overline{V}_p = \alpha(s)\,\overline{E}$	$\overline{V}_p = Z(s)\,\overline{J}$
$\overline{I}_p$	$\overline{I}_p = Y(s)\,\overline{E}$	$\overline{I}_p = \beta(s)\,\overline{J}$

Funzione di trasferimento -1

E' il coefficiente di rete W(s), che lega un'uscita ad un ingresso;

vale per ogni ingresso cisoidale con la propria frequenza generalizzata s

⇨ al variare di s risulta una funzione a valori complessi della variabile complessa s.

n.b.: la sua definizione più generale utilizza la Laplace-trasformata, ma la sua struttura è proprio quella trovata qui, operando sulle cisoidi.

Funzione di trasferimento -2

Può essere scritta come rapporto tra polinomi in s:

$$W(s) = \frac{\sum_{i=0}^{m} b_i s^i}{\sum_{i=0}^{n} a_i s^i} = \frac{b_m s^m + \ \dots\ + b_1 s + b_0}{a_n s^n + \ \dots\ + a_1 s + a_0}$$

da cui
$$\overline{Y}_p \sum_{i=0}^{n} a_i s^i = \overline{U} \sum_{i=0}^{m} b_i s^i$$

ossia

$$a_n s^n\,\overline{Y}_p + \ \dots\ + a_1 s\overline{Y}_p + a_0\,\overline{Y}_p = b_m s^m\,\overline{U} + \ \dots\ + b_1 s\overline{U} + b_0\,\overline{U}$$

questa è la relazione ingresso-uscita in forma simbolica generalizzata (nel dominio della frequenza), corrispondente all'equazione differenziale.

Funzione di trasferimento -3

Il prodotto in s dei fasori generalizzati $s\overline{Y}_p$, $s\overline{U}$ corrisponde alla derivata temporale delle cisoidi dy_p/dt e du/dt (come per le sinusoidi: $j\omega\overline{U} \Leftrightarrow du/dt$).

Iterando e anti-trasformando si ottiene, per via alternativa, l'equazione differenziale tra uscita y(t) e ingresso u(t):

$$a_n s^n \overline{Y}_p + \ \dots\ + a_1 s\overline{Y}_p + a_0 \overline{Y}_p = b_m s^m \overline{U} + \ \dots\ + b_1 s\overline{U} + b_0 \overline{U}$$

$$\Updownarrow$$

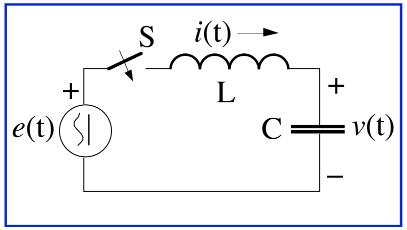
$$a_n \frac{d^n y(t)}{dt^n} + \cdots + a_1 \frac{dy(t)}{dt} + a_0\, y(t) = b_m \frac{d^m u(t)}{dt^m} + \cdots + b_1 \frac{du(t)}{dt} + b_0\, u(t)$$

Oscillatore LC -1

$e(t)=E_M\text{sen}(\omega t)$

per t<0 S è in 2 e il circuito a destra è a riposo

In t=0 S chiude



Analisi per v(t):

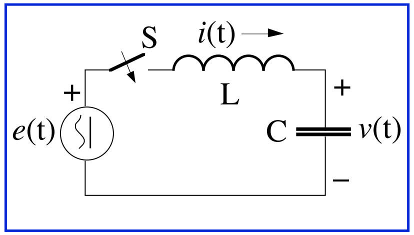
LKT :	$v_L(t)+v(t)=e(t)$		
+ L :	$v_L(t)=L\,di(t)/dt$	$\Rightarrow$	$L\,di(t)/dt+v(t)=e(t)$
+ LKC :	$i_C(t)=i(t)$	$\Rightarrow$	$L\,di_C(t)/dt+v(t)=e(t)$
+ C :	$i_C(t)=C\,dv(t)/dt$	$\Rightarrow$	$LC\,d^2v(t)/dt^2+v(t)=e(t)$

e.d. lineare di secondo grado a coefficienti costanti

Oscillatore LC -2

Integrale particolare:

sinusoidale isofrequenziale con il t.n. $e(t)$



$v_p(t)=V_M\text{sen}(\omega t+\alpha)$

Per sostituzione

derivando 2 volte: $d^2v_p/dt^2=-\omega^2V_M\text{sen}(\omega t+\alpha)$

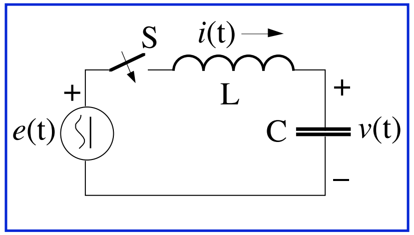
sostituendo nella e.d.: $(1-\omega^2LC)\,V_M\text{sen}(\omega t+\alpha)=E_M\text{sen}(\omega t)$

$$\Rightarrow \quad V_M=\frac{1}{1-\omega^2LC}E_M \quad , \quad \alpha=0$$

Oscillatore LC -3

Integrale particolare:

sinusoidale isofrequenziale con il t.n. $e(t)$



$v_p(t)=V_M\text{sen}(\omega t+\alpha)$

Col metodo fasoriale

$$\bar{E}=E_M e^{j0} \qquad \bar{V}=\frac{\dfrac{1}{j\omega C}}{\dfrac{1}{j\omega C}+j\omega L}\bar{E}=\frac{\dfrac{1}{\omega C}}{\dfrac{1}{\omega C}-\omega L}\bar{E}=\frac{1}{1-\omega^2LC}\bar{E}$$

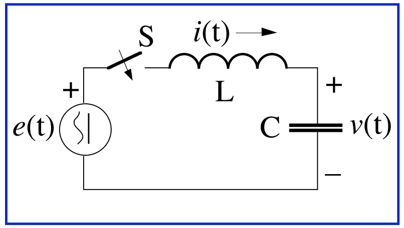
$$\bar{V}=V_M e^{j\alpha} \;\Rightarrow\; V_M=\frac{1}{1-\omega^2LC}E_M \quad , \quad \alpha=0$$

Oscillatore LC -4

Metodo fasoriale generalizzato:

Con il generico ingresso cisoidale

$$e(t)=E_M\,e^{\sigma t}\text{sen}(\omega t)$$



con frequenza generalizzata

$$s=\sigma+j\omega$$

analisi in s:

$$\bar{V}=\frac{\dfrac{1}{sC}}{\dfrac{1}{sC}+sL}\bar{E}=\frac{1}{1+s^2LC}\bar{E} \quad \begin{cases}\Rightarrow \left(1+s^2LC\right)\bar{V}=\bar{E}\\ \Rightarrow LCs^2\bar{V}+\bar{V}=\bar{E}\end{cases}$$

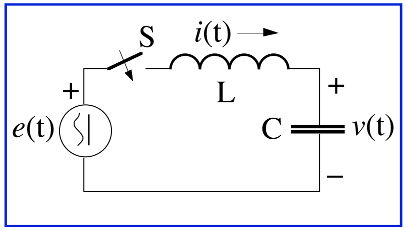
antitrasformando in t $\quad \Rightarrow LC\dfrac{d^2v}{dt^2}+v=e$

Oscillatore LC -5

$e(t)=E_M \mathrm{sen}(\omega t)$

per t<0 S è in 2 e il circuito a destra è a riposo

In t=0 S chiude



Analisi per i(t):

LKC : $i(t) = i_C(t)$

+ C : $i_C(t) = C\, dv(t)/dt \Rightarrow i(t) = C\, dv(t)/dt$

LKT : $v(t) = e(t) - v_L(t) \Rightarrow i(t) = C\, d[e(t) - v_L(t)]/dt =$

$= C\, d\,e(t)/dt - C dv_L(t)/dt$

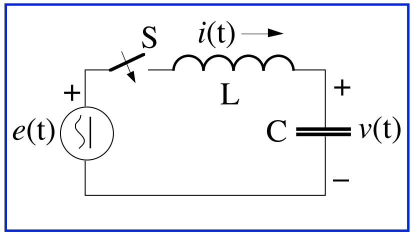
+ L : $v_L(t) = L\, di(t)/dt \Rightarrow LC\, d^2 i(t)/dt^2 + i(t) = C\, d\,e(t)/dt$

e.d. lineare di secondo grado a coefficienti costanti

Oscillatore LC -6

Integrale particolare:

sinusoidale isofrequenziale con il t.n. $e(t)$



$i_p(t) = I_M \mathrm{sen}(\omega t+\beta)$

Per sostituzione

derivando 2 volte: $d^2 i_p/dt^2 = -\omega^2 I_M \mathrm{sen}(\omega t+\beta)$

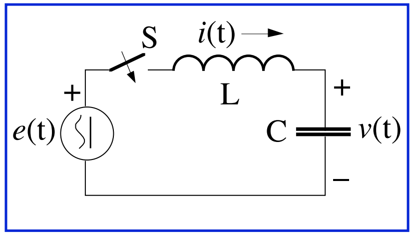
sostituendo nella e.d.: $(1 - \omega^2 LC)\, I_M \mathrm{sen}(\omega t+\beta) = \omega C\, E_M \mathrm{sen}(\omega t+\pi/2)$

$$\Rightarrow \quad I_M = \frac{\omega C}{1-\omega^2 LC} E_M \quad , \quad \beta = \frac{\pi}{2}$$

Oscillatore LC -7

Integrale particolare:

sinusoidale isofrequenziale con il t.n. $e(t)$



$i_p(t) = I_M \mathrm{sen}(\omega t+\beta)$

Col metodo fasoriale

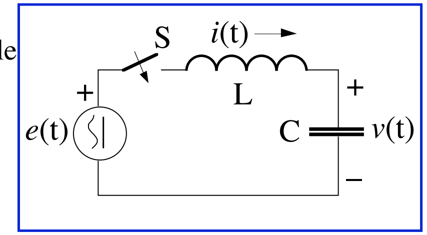
$$\bar{E} = E_M e^{j0} \qquad \bar{I} = \frac{1}{\frac{1}{j\omega C} + j\omega L}\bar{E} = \frac{j}{\frac{1}{\omega C} - \omega L}\bar{E} = \frac{\omega C\, e^{j\pi/2}}{1-\omega^2 LC}\bar{E}$$

$$\bar{I} = I_M e^{j\beta} \Rightarrow \qquad I_M = \frac{\omega C}{1-\omega^2 LC} E_M \quad , \quad \beta = \frac{\pi}{2}$$

Oscillatore LC -8

Metodo fasoriale generalizzato:

Con il generico ingresso cisoidale



$$e(t)=E_M e^{\sigma t} \mathrm{sen}(\omega t)$$

con frequenza generalizzata

$$s=\sigma+j\omega$$

analisi in s:

$$I = \frac{1}{\frac{1}{sC} + sL} E = \frac{sC}{1+s^2 LC} E \quad \begin{cases} \Rightarrow \left(1+s^2 LC\right) I = sCE \\ \Rightarrow LCs^2 I + I = CsE \end{cases}$$

antitrasformando in t $\quad \Rightarrow LC\dfrac{d^2 i}{dt^2} + i = C\dfrac{de}{dt}$

Integrale dell'omogenea -1

Equazione differenziale omogenea associata:

si ottiene azzerando il termine noto nella e.d.o. completa, oppure si deduce analizzando la rete inerte (con generatori spenti: $e(t) \to$ c.c., $j(t) \to$ c.a.)

$$\sum_{i=0}^{n} a_i \frac{d^i y(t)}{dt^i} = 0$$

$$a_n \frac{d^n y(t)}{dt^n} + \cdots + a_1 \frac{d\, y(t)}{dt} + a_0\, y(t) = 0$$

Integrale dell'omogenea -2

Equazione (algebrica) caratteristica:

si ottiene sostituendo la derivata $d^i y/dt^i$ con la potenza della variabile complessa s^i (n.b.: $dy(t)/dt \to s$, $y(t) \to 1$):

$$\sum_{i=0}^{n} a_i\, s^i = 0$$

$$a_n s^n + \cdots + a_1 s + a_0 = 0$$

- è un'equazione algebrica a coefficienti reali di grado n nella variabile complessa s
- ammette n soluzioni (radici) in campo complesso

Integrale dell'omogenea -3

Radici dell'equazione caratteristica:

Possono essere:

reali	$s_i = \sigma_i$	$i = 1 \ldots n_r$
complesse	$s_i = \sigma_i \pm j\omega_i$	$i = 1 \ldots n_c$
		$n_r + 2\, n_c = n$

Note:

le complesse sono sempre coniugate a 2 a 2;

le parti reali possono essere nulle ($s_i = 0$ e $s_i = \pm j\omega_i$, rispettivamente)

se $\sigma_i \neq 0$ possono essere multiple (in n_r e n_c si contano le eventuali molteplicità).

Integrale dell'omogenea -4

Modi normali (naturali) dell'omogenea:

Le radici dell'equazione caratteristica definiscono i modi normali:

A) radice reale (singola) ⇨ modo unidirezionale:

$s_i = \sigma_i$ ⇨ $y_i(t) = Y_i\, e^{\sigma_i t}$

(radice doppia: c'è anche ⇨ $y_{i2}(t) = K_{i1}\, t\, e^{\sigma_i t}$

radice tripla … . . . .)

Integrale dell'omogenea -5

Modi normali (naturali) dell'omogenea:

Le radici dell'equazione caratteristica definiscono i modi normali:

B) radici compl. coniugate (sing.) ⇨ modo pseudoperiodico:

$s_i = \sigma_i \pm j\omega \;\Rightarrow\; y_i(t) = e^{\sigma_i t}\,(Y_{ci}\cos\omega_i t + Y_{si}\sin\omega_i t) =$

$= Y_i\, e^{\sigma_i t}\sin(\omega_i t + \gamma_i)$

(rad. compl. con. doppie:

c'è anche $\Rightarrow y_i(t) = e^{\sigma_i t}\, t\,(K_{ci1}\cos\omega_i t + K_{si1}\sin\omega_i t) =$

$= Y_{i1}\, t\, e^{\sigma_i t}\sin(\omega_i t + \gamma_{i1})$

coppia di radici triple . . . .)

Integrale dell'omogenea -6

Modi normali (naturali) dell'omogenea:

I modi normali sono **cisoidi** e le radici dell'equazione caratteristica sono le **frequenze generalizzate naturali** (proprie) della rete.

Si trovano:

n_r modi undirezionali, ciascuno con 1 costante di integrazione;

n_c modi pseudoperiodici, ciascuno con 2 costanti di integrazione.
$n = n_r + n_c$ modi totali.

Integrale dell'omogenea -7

Integrale generale dell'omogenea:

L'integrale generale dell'omogenea è dato dalla somma dei modi naturali (n_r undirezionali + n_c pseudoperiodici) che in tutto hanno n costanti di integrazione (da determinare).

Ad esempio se tutte le radici sono singole:

$$y_o(t) = \sum_{i=1}^{n_r} Y_i e^{\sigma_i t} + \sum_{i=1}^{n_c} e^{\sigma_i t}\left(Y_{ci}\cos\omega_i t + Y_{si}\,\mathrm{sen}\,\omega_i t\right)$$

Integrale dell'omogenea -8

Frequenze generalizzate naturali :

Essendo le radici dell'equazione caratteristica, dipendono dai suoi coefficienti a_i i=1…n e quindi dalla **rete inerte** (R, L, C e loro connessioni).

SONO PROPRIETA' INTRINSECHE DELLA RETE INERTE, CON INGRESSI NULLI

Relazioni:

La struttura della rete inerte definisce le frequenze generalizzate naturali

Integrale dell'omogenea -9

bipoli della rete inerte		caratteristiche delle radici	
presenti	assenti	necessarie	impossibili
R	L C	$n=0$	–
C	L R	$\sigma_i=0\ \omega_i=0\ \forall i$	$\sigma_i\neq 0\ \omega_i\neq 0$
L	C R	$\sigma_i=0\ \omega_i=0\ \forall i$	$\sigma_i\neq 0\ \omega_i\neq 0$
L C	R	$\sigma_i=0\ \omega_i\geq 0\ \forall i$	$\sigma_i\neq 0$
C R>0	L R<0	$\sigma_i\leq 0\ \omega_i=0\ \forall i$	$\sigma_i>0\ \omega_i\neq 0$
L R>0	C R<0	$\sigma_i\leq 0\ \omega_i=0\ \forall i$	$\sigma_i>0\ \omega_i\neq 0$
L C R>0	R<0	$\sigma_i\leq 0\ \omega_i\geq 0\ \forall i$	$\sigma_i>0$
C R<0	L R>0	$\sigma_i\geq 0\ \omega_i=0\ \forall i$	$\sigma_i<0\ \omega_i\neq 0$
L R<0	C R>0	$\sigma_i\geq 0\ \omega_i=0\ \forall i$	$\sigma_i<0\ \omega_i\neq 0$
L C R<0	R>0	$\sigma_i\geq 0\ \omega_i\geq 0\ \forall i$	$\sigma_i<0$

Integrale dell'omogenea -10

Reti passive = STABILI

Nelle reti passive (costituite solo da resistori, induttori e condensatori **passivi**) le parti reali delle frequenze generalizzate naturali sono non positive: $\sigma_i \leq 0$.

Gli esponenziali dei modi naturali non si espandono al crescere di t ⇨ **la rete è stabile**.

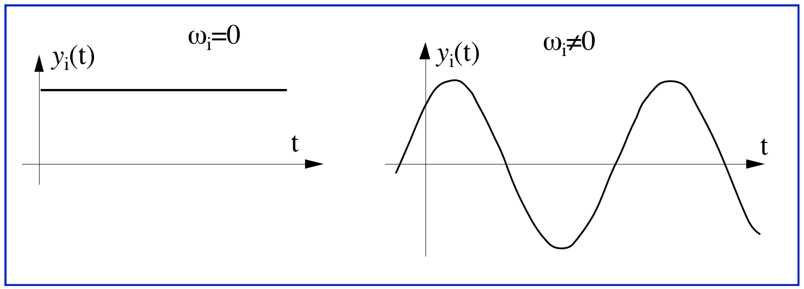
Integrale dell'omogenea -11

Reti passive = STABILI

$\sigma_i=0$

l'esponenziale del modo naturale è costante: $e^{\sigma t} = e^{0t} = 1$

⇨ il modo è **permanente** (costante se $\omega_i=0$; sinusoidale puro se $\omega_i\neq 0$).



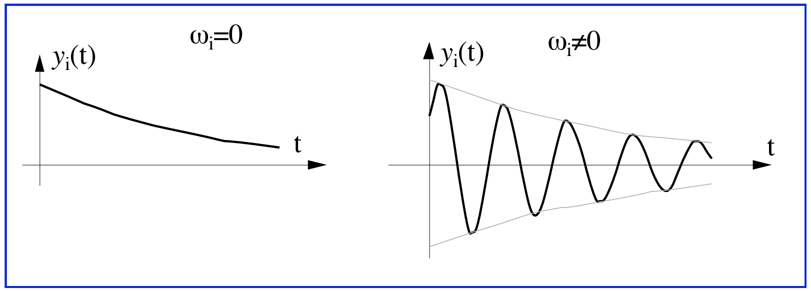
Integrale dell'omogenea -12

Reti passive = STABILI

$\sigma_i<0$

l'esponenziale $e^{\sigma t}$ del modo naturale decresce con t

⇨ il modo è **smorzato** (unidirezionale se $\omega_i=0$; sinusoidale se $\omega_i\neq 0$).



Integrale dell'omogenea -13

Considerazioni energetiche nelle reti passive

$\omega_i \neq 0$ dipendono dall'interazione di L e C (oscillazioni di energia capacitiva ed induttiva)

$\sigma_i \leq 0$ dipendono dalla presenza di R (dissipazioni di energia).

Integrale dell'omogenea -13

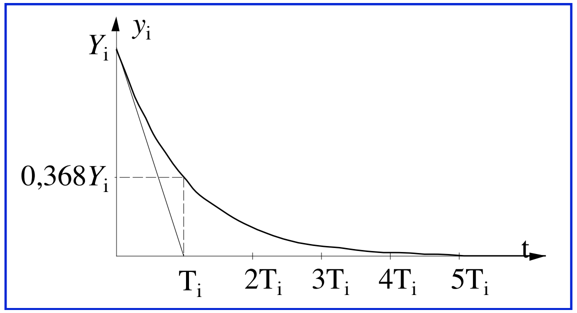
Reti passive = STABILI

$\sigma_i < 0$

Si preferisce considerare la COSTANTE DI TEMPO

$$T_i = -\frac{1}{\sigma_i} \quad [s]$$

dopo un tempo di $5T_i$ il modo è praticamente estinto



Integrale dell'omogenea -14

RETI ASSOLUTAMENTE STABILI

Sono quelle nelle quali tutte le frequenze proprie della rete hanno parte reale negativa:

$\sigma_i < 0 \quad i=1,\dots n$

ovvero, i modi normali sono tutti smorzati con costanti di tempo T_1, T_2, T_3 … finite.

COSTANTE DI TEMPO DOMINANTE T_M = massima costante di tempo

dopo un tempo di $5T_M$ tutti i modi sono praticamente estinti ⇨

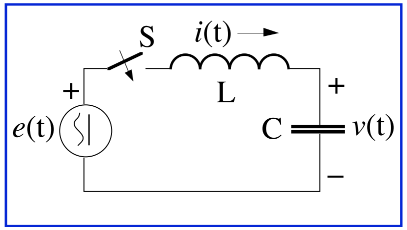
l'intera omogenea $y_o(t)$ è estinta ⇨

L'OMOGENEA E' UN TRANSITORIO

Oscillatore LC -9

Equazione omogenea associata

$$LC\frac{d^2 v(t)}{dt^2} + v(t) = 0$$



Equazione caratteristica:

$$LC\,s^2 + 1 = 0$$

Frequenze naturali: $s = \pm j\frac{1}{\sqrt{LC}} = \pm j\omega_o \qquad [s^{-1}] = [rad/s]$

Modo normale: $v_o(t) = V_{co}\cos\omega_o t + V_{so}\,\mathrm{sen}\,\omega_o t$

Costanti d'integrazione -1

Le n costanti di integrazione che compaiono nei modi dell'omogenea $y_o(t)$ si ottengono fissando i valori iniziali (in t=0) dell'**integrale complessivo** $y(t) = y_p(t) + y_o(t)$ e delle sue n-1 derivate:

$$y(0) = y_p(0) + y_o(0)$$

$$\left.\frac{d\,y(t)}{dt}\right|_{t=0} = \left.\frac{d\,y_p(t)}{dt}\right|_{t=0} + \left.\frac{d\,y_o(t)}{dt}\right|_{t=0}$$

.....

$$\left.\frac{d\,y^{(n-1)}(t)}{dt^{(n-1)}}\right|_{t=0} = \left.\frac{d\,y_p^{(n-1)}(t)}{dt^{(n-1)}}\right|_{t=0} + \left.\frac{d\,y_o^{(n-1)}(t)}{dt^{(n-1)}}\right|_{t=0}$$

Costanti d'integrazione -2

Tali valori vengono fissati esprimendoli, tramite le equazioni di rete, in funzione delle grandezze note in t=0; queste sono i valori iniziali delle variabili di stato e degli ingressi:

$$v_C(0) \quad i_L(0) \quad e(0) \quad j(0)$$

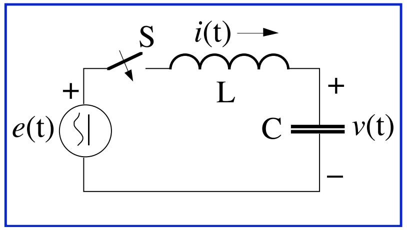
Oscillatore LC -10

Integrale particolare

$v_p(t) = V_M \,\text{sen}\, \omega t$

Integrale dell'omogenea:

$v_o(t) = V_{co}\cos\omega_o t + V_{so}\text{sen}\, \omega_o t$



Uscita totale:

$v(t) = v_p(t) + v_o(t) = V_M \,\text{sen}\, \omega t + V_{co}\cos\omega_o t + V_{so}\text{sen}\, \omega_o t$

Oscillatore LC -11

Valore di y(0): $v(0) = V_{co}$

è essa stessa variabile di stato e quindi nota in t=0: $v_C(0) = 0$, nulla perché la rete è inizialmente a riposo

Valore di dy(t)/dt in t=0 : $v\,'(0) = \omega V_M + \omega_o V_{so}$

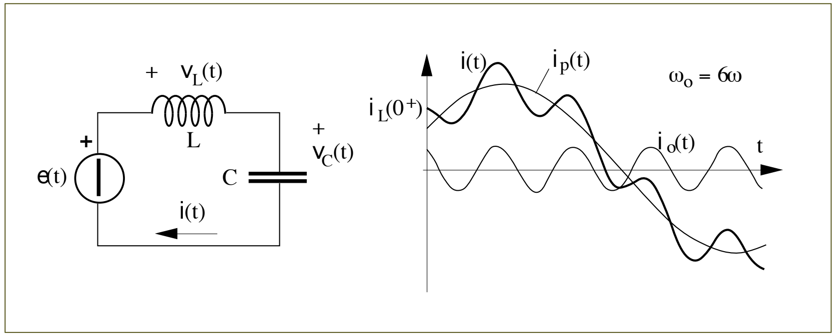
Per la relazione costitutiva i_C=Cdv/dt è uguale a i_C/C che per LKC è i/C , ove i, corrente di L, è variabile di stato, nota: $i_L(0) = 0$, nulla perché la rete è inizialmente a riposo

Quindi:

$V_{co} = 0$

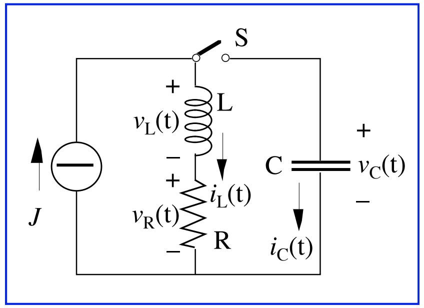
$V_{so} = -V_M\, \omega/\omega_o$

Oscillatore LC -12



Esempio riepilogativo

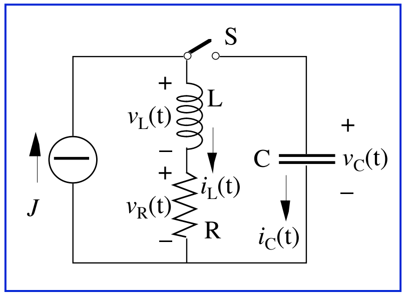
Evoluzione RLC con ingresso non nullo da stato iniziale non nullo



Per t<0 S le rete è a regime stazionario con S aperto e C scarico. In t=0 S chiude. Analisi dell'evoluzione di $i_L(t)$

Evoluzione RLC -1

Analisi per t<0



regime stazionario

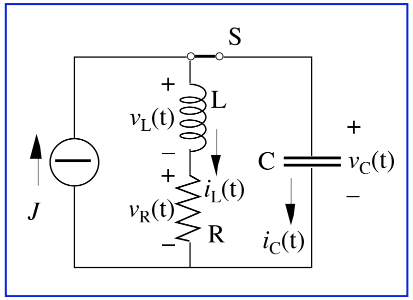
servono solo le variabili di stato

$$I_L = J \quad \text{e} \quad V_C = 0$$

$$\Rightarrow \quad i_L(0) = J \quad \text{e} \quad v_C(0) = 0$$

Evoluzione RLC -2

Analisi per t>0



LKC $\quad i_L + i_C = J$

+C $\quad i_L + C\, dv_C/dt = J$

+LKT $\quad i_L + C\, d(v_L+v_R)/dt = J$

=> $\quad i_L + C\, dv_L/dt + C\, dv_R/dt = J$

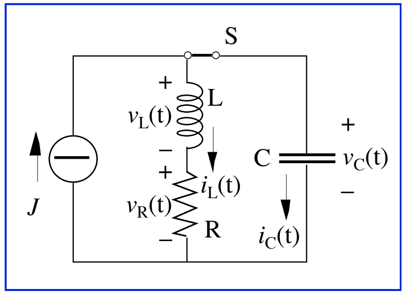
+L e R $\quad i_L + CL\, d^2 i_L/dt^2 + CR\, di_R/dt = J$

+ LKC $\quad CL\, d^2 i_L/dt^2 + CR\, di_L/dt + i_L = J$

equazione differenziale di 2° grado completa, non omogenea

Evoluzione RLC -3

Integrale particolare:



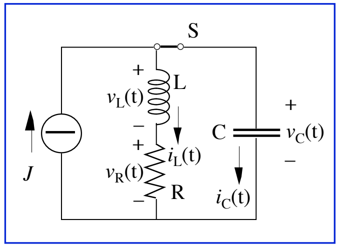
costante come il t.n., pari alla soluzione di regime stazionario

$$i_p(t) = I = J$$

Evoluzione RLC -4

Equazione omogenea associata

$$\frac{d^2 i}{dt^2} + \frac{R}{L}\frac{d\,i}{dt} + \frac{1}{CL} i = 0$$



Equazione caratteristica:

$$s^2 + \frac{R}{L} s + \frac{1}{CL} = 0$$

Radici: $$s_{1,2} = -\frac{R}{2L} \pm \sqrt{\frac{R^2}{4L^2} - \frac{1}{CL}}$$

a seconda del segno del discriminante possono essere: (1) reali distinte, (2) reali coincidenti o (3) complesse coniugate

Evoluzione RLC -5

(1) Radici reali distinte

Evoluzione sovrasmorzata

$$R > 2\sqrt{\frac{L}{C}}$$

$$s_1 = \sigma_1 = -\frac{R}{2L}\left(1 + \sqrt{1 - \frac{4L}{R^2C}}\right) \quad \Rightarrow \quad T_1 = -\frac{1}{\sigma_1} = \frac{1}{\frac{R}{2L}\left(1 + \sqrt{1 - \frac{4L}{R^2C}}\right)}$$

$$s_2 = \sigma_2 = -\frac{R}{2L}\left(1 - \sqrt{1 - \frac{4L}{R^2C}}\right) \quad \Rightarrow \quad T_2 = -\frac{1}{\sigma_2} = \frac{1}{\frac{R}{2L}\left(1 - \sqrt{1 - \frac{4L}{R^2C}}\right)}$$

$$i_o(t) = I_1 e^{-\frac{t}{T_1}} + I_2 e^{-\frac{t}{T_2}}$$

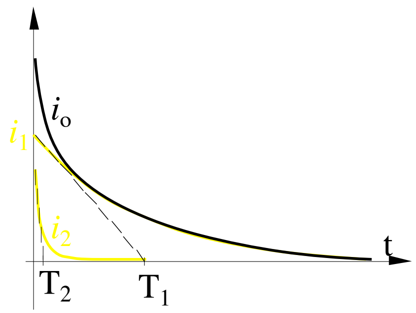
Evoluzione RLC -6

(1) Radici reali distinte

Evoluzione sovrasmorzata

$$R > 2\sqrt{\frac{L}{C}}$$

$$i_o(t) = I_1 e^{-\frac{t}{T_1}} + I_2 e^{-\frac{t}{T_2}}$$



Evoluzione RLC -7

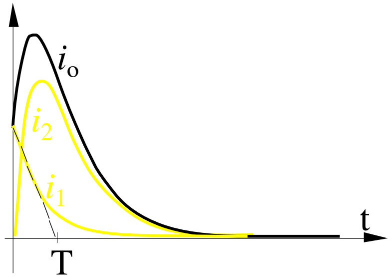
(2) Radici reali coincidenti

Evoluzione criticamente smorzata

$$R = 2\sqrt{\frac{L}{C}}$$

$$s_1 = s_2 = \sigma = -\frac{R}{2L} \qquad \Rightarrow \qquad T = -\frac{1}{\sigma} = \frac{2L}{R}$$

$$i_o(t) = I_1\, e^{-\frac{t}{T}} + K_2\, t\, e^{-\frac{t}{T}}$$



Evoluzione RLC -8

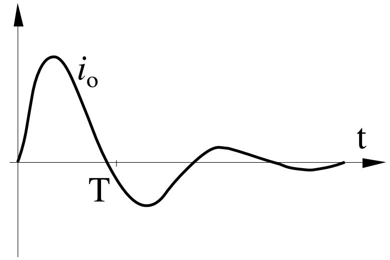
(3) Radici complesse coniugate

Evoluzione sottosmorzata

$$R < 2\sqrt{\frac{L}{C}}$$

$$s_{1,2} = -\frac{R}{2L} \pm j\sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R}{2L}} = -\frac{1}{T} \pm j\omega$$

$$i_o(t) = e^{-\frac{t}{T}}\left[I_{co}\cos\omega t + I_{so}\,\mathrm{sen}\,\omega t\right]$$



Evoluzione RLC -7

Risposta totale (solo per il caso sovrasmorzato - (1) -)

$$i_L(t) = i_p + i_o = J + I_1\, e^{-\frac{t}{T_1}} + I_2\, e^{-\frac{t}{T_2}}$$

Valori iniziali

I_1 e I_2 si determinano vincolando i valori in t=0 di i_L e della sua derivata prima ai valori iniziali delle variabili di stato: $i_L(0) = J$ e $v_C(0) = 0$.

Evoluzione RLC -7

uscita in t=0:

$i_L(0) = J + I_1 + I_2$ ⇨ $I_1 + I_2 = 0$

derivata dell'uscita in t=0:

da $\dfrac{d\,i_L}{dt} = \dfrac{v_L}{L} = \dfrac{v_C - v_R}{L} = \dfrac{v_C - R\,i_L}{L}$ ⇨ $-\dfrac{1}{T_1}I_1 - \dfrac{1}{T_2}I_2 = \dfrac{0 - R\,J}{L}$

Dalle 2 equazioni si ottiene $I_1 = -I_2 = \dfrac{T_2\,T_1}{T_2 - T_1}\dfrac{R\,J}{L}$

e quindi $i_L(t) = J + J\dfrac{T_2\,T_1}{T_2 - T_1}\dfrac{R}{L}\left(e^{-\frac{t}{T_1}} - e^{-\frac{t}{T_2}}\right)$