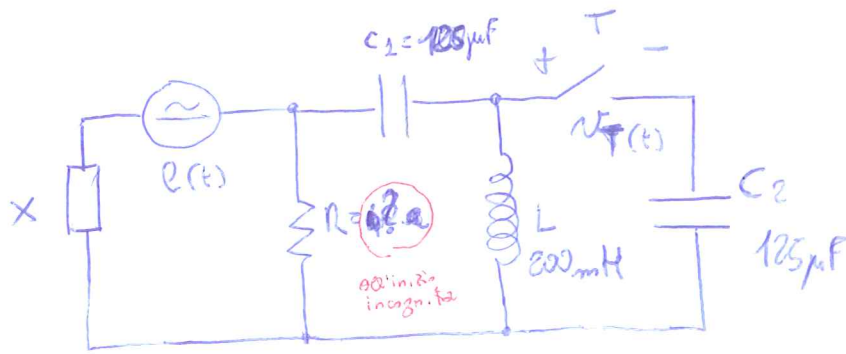




$$\omega = 200 \frac{\text{rad}}{\text{sec}}$$

$$e(t) = E \sqrt{2} \sin \omega t \quad E = 600 \text{ V}$$

TROVARE

- X è puramente immaginaria
- Valore p.f. V_T con T aperto
- R
- P_E T chiuso

$$\text{con } Q_E^I = -4500 \text{ VAR } T \text{ aperto}$$

$$\text{e con } Q_E^{II} = -2880 \text{ VAR } T \text{ chiuso}$$

Soluzione

Conversione in fasoriale del generatore $\bar{E} = 600 e^{j0}$

Vediamo L e C_2 sono in risonanza

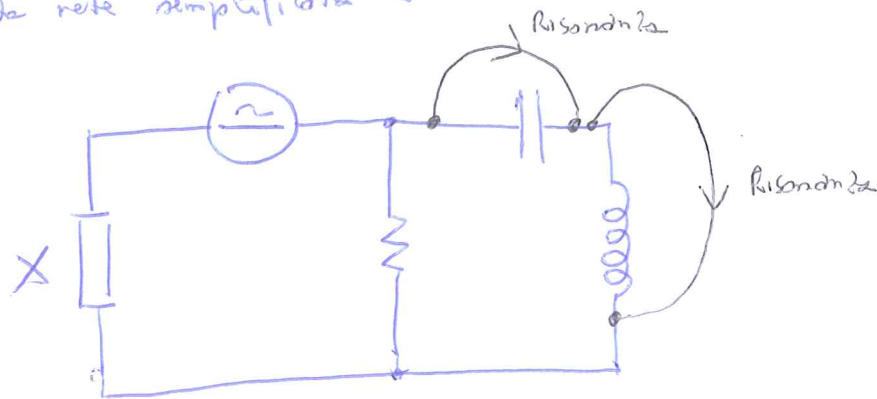
$$\frac{1}{\sqrt{LC_2}} = \frac{1}{\sqrt{200 \cdot 10^{-3} \cdot 125 \cdot 10^{-6}}} = 200$$

parlo della
pulsazione di
funzionamento della
rete quindi
sono in risonanza
serie ovvero in corto

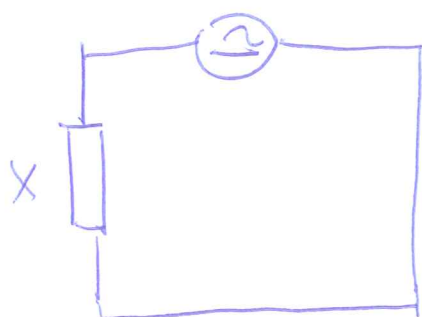
Se parallelas invece risulta in anti risonanza
e quindi fra L e C_2 il circuito sarebbe
aperto.

Possiamo sfruttare questi dati per semplificare la rete

La rete semplificata è:



A causa della risonanza il circuito si semplifica ulteriormente in:



Il testo dice che X è puramente immaginaria ed è nota la pot. reattiva quindi posso ricavare X .

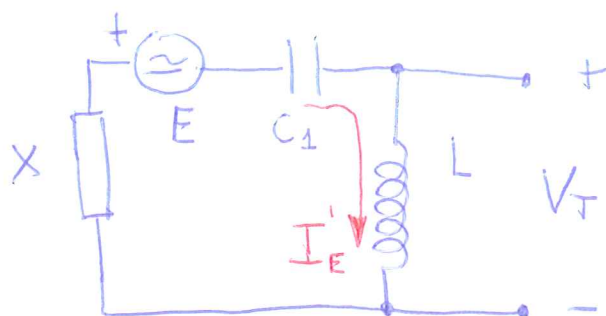
$$Q_E' = \frac{E^2}{X} \Rightarrow \boxed{X = \frac{E^2}{Q_E}} = -80 \, \Omega$$

quindi $X = -80 \, \Omega$ è quindi capacitiva dovuto al segno negativo.

Attenzione: nei bipoli in risonanza, presi singolarmente, la caduta di tensione non è nulla anche se la è nella serie.

Ri colleghiamo L e C_1 sulla rete e indichiamo V_T in valore efficace

con T aperto



$$Q_E' = X I_E'^2$$

$$I_E' = \sqrt{\frac{Q_E'}{X}} = 7,5 \, A$$

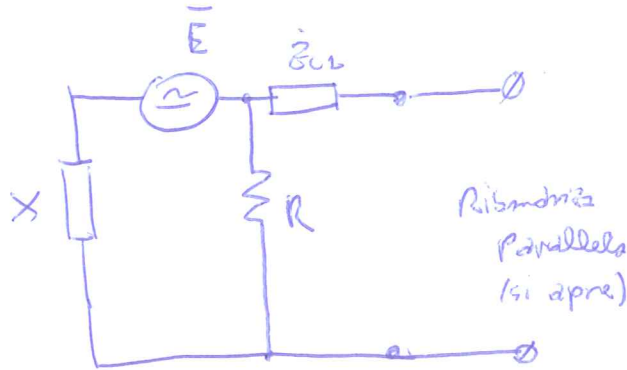
Sono valori eff. e non positivi sempre.
pag 296

$$V_L = Z_L \cdot I_E$$

$$\omega L \cdot I_E = 200 \cdot 200 \cdot 10^{-3} \cdot \frac{15}{2} = 300 \text{ V}$$

$$V_L = 300 \text{ V}$$

ora chiudiamo T la rete, grazie alla risonanza diventa:



Dato che $\tilde{Z}_{cs}$ è equipotenziale (si trova su un ramo aperto)

lo posso togliere e la rete si semplifica ulteriormente.



$$Q_E'' = X I^2$$

da cui

$$I_E'' = \sqrt{\frac{Q_E''}{X}} = 6 \text{ A}$$

tutta la reattiva va quindi su X

visto che C non è attraversato da corrente dato che si trova in un ramo aperto.

$$\frac{E}{I_E} = Z$$

$$= \sqrt{R^2 + X^2}$$

dato che E e I_E sono valori efficaci si ottiene il modulo di $\tilde{Z}$ $|\tilde{Z}| = Z$

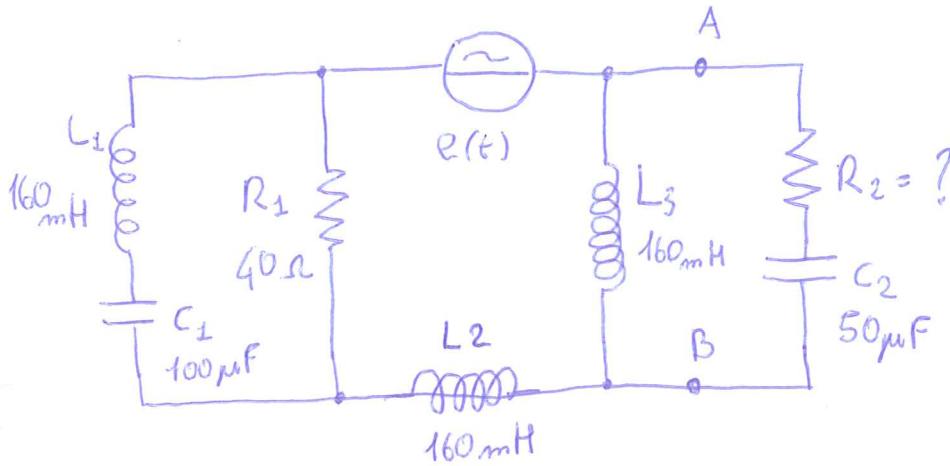
ricaviamo R come richiesto dall'esercizio

$$R = \sqrt{\frac{E^2}{I_E^2} - X^2} = 60 \, \Omega$$

La potenza attiva vale: $P = RI^2 = 60 \cdot 6^2 = 2160 \text{ [W]}$

ESERCIZIO

Datta la rete in figura



$$e(t) = E \cdot \sqrt{2} (\omega t + \alpha)$$

$$\alpha = -\frac{\pi}{4} \quad E = 480$$

$$\omega = 250 \frac{\text{rad}}{\text{sec}}$$

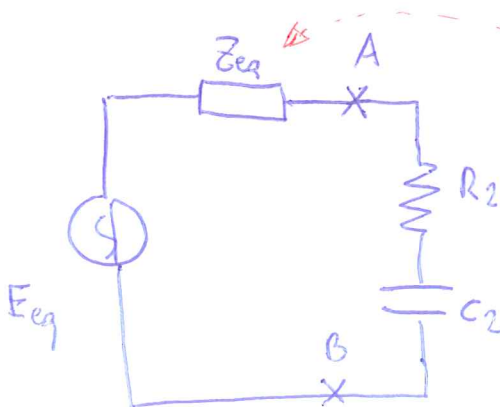
Trovare:

- thevenin a sinistra di A-B
- I_2 efficace
- R_2
- $V_{AB \text{ max}}$

Soluzione

$$\bar{E} = 480 e^{-j\frac{\pi}{4}}$$

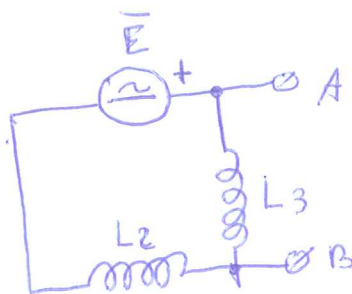
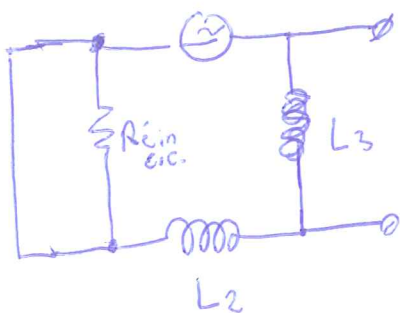
C_1 e L_1 sono in risonanza
dato che $\frac{1}{\sqrt{LC}} = \omega$ di funzionamento



$$\dot{Z}_{eq} = \dot{Z}_{L2} \parallel \dot{Z}_{L3} = 20j$$

$$\dot{Z}_L = j\omega L = 40j$$

ora troviamo la Z_{eq}

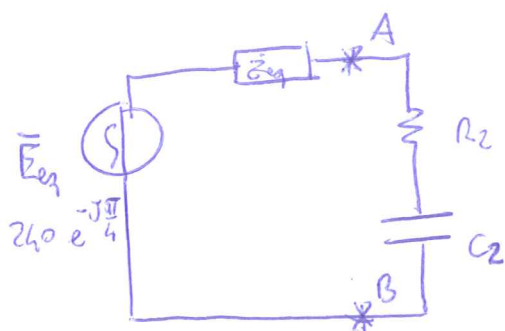


$$\bar{E}_q = \bar{E} \cdot \frac{\bar{Z}_{L3}}{\bar{Z}_{L3} + \bar{Z}_{L2}} = 240 e^{-j\frac{\pi}{4}} \quad \text{PARTITORE DI TENSIONE}$$

Abbiamo disponibile la potenza reattiva assorbita dal condensatore quindi da

$$X_{C2} = -\frac{1}{\omega C_2} = -80 \, \Omega$$

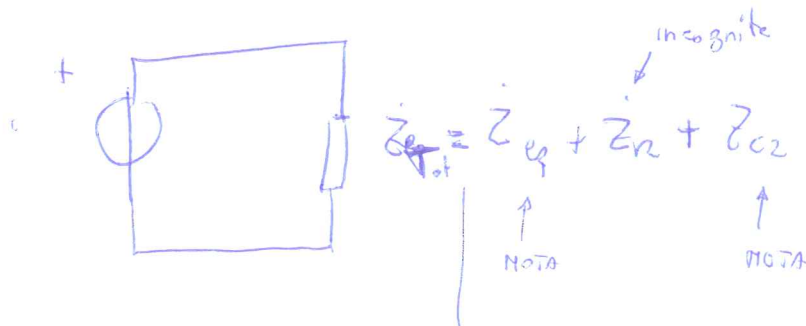
$$Q = X I^2 \quad \text{valori efficaci}$$



$$I_2 = I_{R2} = \sqrt{\frac{Q_{C2}}{X}} = 2\sqrt{2} \, A$$

Vediamo come calcolare la R_2 .

Si sa che la corrente efficace sulla R è la stessa del generatore perché in serie e quindi la maglie sarebbe



dato che con i valori efficaci vale $= R + jX$
def. di impedenza

$$V = Z I$$

$$\left(\frac{V}{I}\right) = |\dot{Z}| = \sqrt{R^2 + X_{eq}^2} \quad \Rightarrow \quad R = 60 \, \Omega$$

$\uparrow$
 eff. ω_0

$$\left(\frac{V}{I}\right)^2 = R^2 + X_{eq}^2 \quad \Rightarrow \quad \left(\frac{V}{I}\right)^2 - X_{eq}^2 = R^2$$

quindi

$$R = \sqrt{\left(\frac{V}{I}\right)^2 - X_{eq}^2} = 60 \, \Omega$$

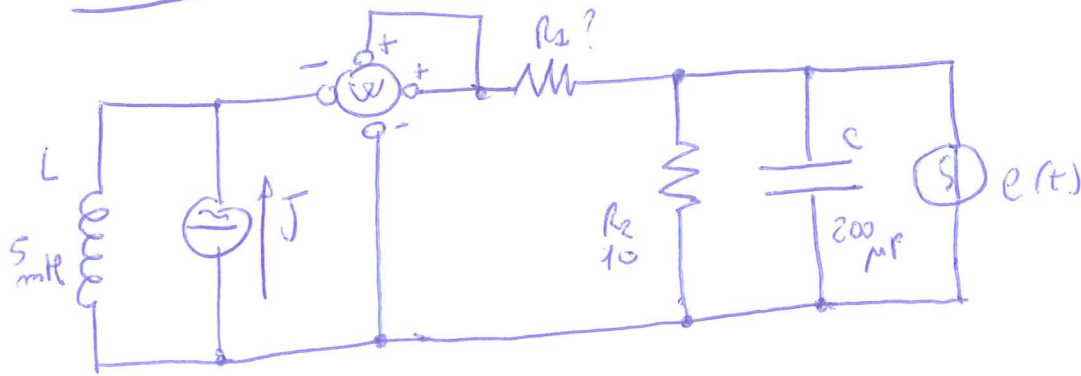
V_{AB} lo troviamo con il partitore di tensione, in fasoriale:

$$\begin{aligned} \bar{V}_{AB} &= \frac{(R_2 + jX_{C2})}{(R_2 + jX_{C2}) + \dot{Z}_{eq1}} \\ &= (60 - j80) 2\sqrt{2} \end{aligned}$$

$$V_{AB} = 200 \sqrt{2}$$

$$V_{ABT} = V_{AB} \sqrt{2} = 400 \, V.$$

Esercizio



$$\omega = 1000 \frac{\text{rad}}{\text{sec}}$$

Trascurare R_1 e P_{av}

$$e(t) = E_m \sin(\omega t + \alpha) \quad \alpha = 0$$

$$E_m = 50 \sqrt{2} \text{ V}$$

$$J(t) = J_m \sin(\omega t + \beta) \quad \beta = \frac{\pi}{4} \text{ rad}$$

$$J_m = 10 \text{ A}$$

$$\omega = 1000 \frac{\text{rad}}{\text{sec}}$$

$$\hat{A} = 500 - j500 \text{ [VA]}$$

$$\bar{E} = 50 e^{j0} = 50 + j0 \text{ V}$$

$$\hat{A} = \bar{E} \bar{I}_R$$

$$\bar{J} = \frac{10}{\sqrt{2}} e^{j\frac{\pi}{4}}$$

$$\bar{I}_R = \frac{\hat{A}}{\bar{E}} = \frac{500 - j500}{50 + j0} = (10 - j10)$$

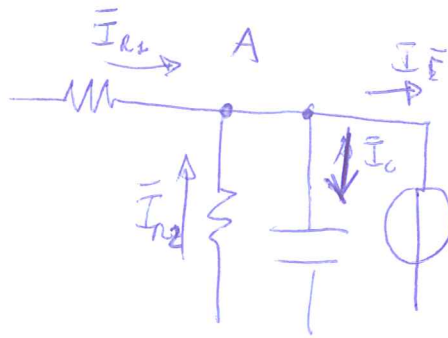
$$\bar{I}_R = (10 + j10) \text{ A}$$

da $\bar{V} = \bar{Z} \bar{I}$ ricaviamo il valore di corrente su C_2

$$\bar{I}_{C_2} = \frac{\bar{E}}{\bar{Z}_C} = \frac{\bar{E}}{jX_C} = \frac{\bar{E}}{\frac{j}{\omega C}} = \frac{50 e^{j0}}{-j5} = 10j \text{ A}$$

$$\bar{I}_{R_2} = \frac{\bar{E}}{\bar{Z}_R} = \frac{50}{R_2} = \frac{50 e^{j0}}{10} = 5 \text{ A}$$

Ormai troviamo la corrente su R_1 : applichiamo LKC

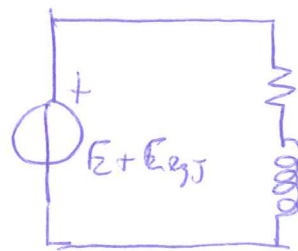
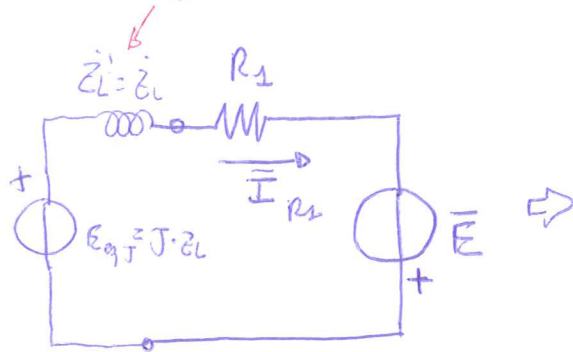


$$LKC = I_{R1} + I_{R2} + I_C = I_E$$

$$I_{R1} = -I_{R2} - I_C + I_E$$

$$I_{R1} = 5A$$

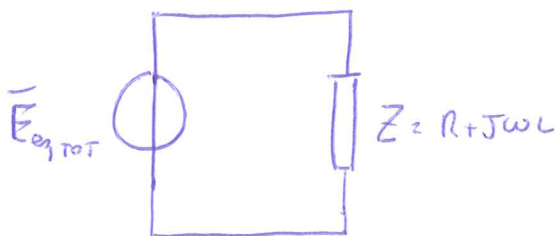
Principio di sostituzione



dove si sono sommati i generatori.

indichiamo un'unica impedenza $Z = R + j\omega L$

$$|Z| = \sqrt{5^2 + 25^2} = \frac{V_{eff}}{I_{eff}} = \frac{25\sqrt{2}}{1} = 25\sqrt{2}$$



$$E_{qJ} = j\omega L \cdot \bar{I} = 25(-1 + j)$$

$$\bar{E}_{qTOT} = \underbrace{50}_{\bar{E}} + \underbrace{25(-1 + j)}_{E_{qJ}}$$

$$R = 5\Omega$$

Vediamo come calcolare la potenza attiva nel voltmetro.

Stiamo attenti che va calcolata sulla rete originale, non nelle varie reti equivalenti

$$\bar{I}_W = -\bar{I}_{R1} \text{ perché in serie quindi } \bar{I}_W = -5A$$

La tensione su W invece sarà quella sulla serie $\bar{E}_{qJ}$ in $\bar{Z}_L \bar{I}_W$

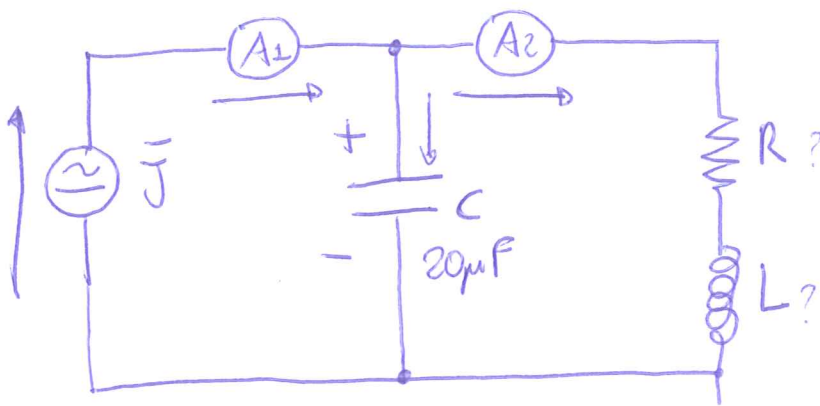
$$\bar{V}_W = \bar{I}_W \bar{Z}_L + \bar{E}_{qJ} = -25j + 25(-1 + j) = -25V$$

calcoliamo la potenza complessa

$$\dot{A} = \overline{V_W} \dot{I}_W = -25 \cdot (-5) = 125 \text{ [VA]}$$

dato che $\dot{A} = P + jQ$ essendo nulla la potenza reattiva
allora $\dot{A} = P = 125 \text{ W}$ (solo parte $\dot{A}$ nulla la reattiva)

ESERCIZIO CONTINUTO NELL'ULTIMO ESAME



$$\omega = 1000 \frac{\text{rad}}{\text{sec}}$$

$$V_C = 500 \sqrt{2} \text{ [V]}$$

$$J = 10 \text{ A}$$

$$I_{A1} = I_{A2}$$

Trovare
 P_J, Q_J, R, L

Soluzione: si ragiona in termini di potenza

$$X_C = \frac{1}{\omega C} = \frac{1000000}{1000 \cdot 20} = 50$$

$A = VI$ in termini efficaci, è la potenza apparente.

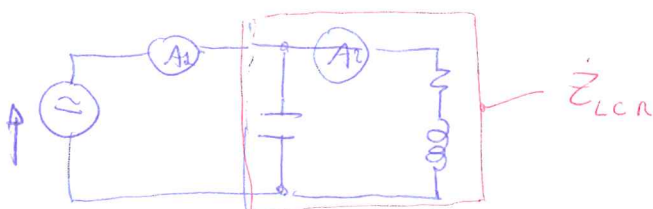
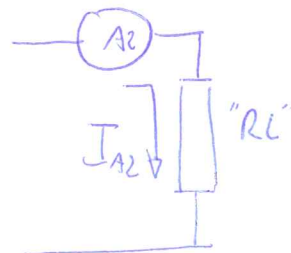
Le indicazioni in potenza ~~apparente~~

$$A_2 = A_1$$

$$\text{dato che } A = VI = \sqrt{P^2 + Q^2}$$

$$A_2 = I_{A2} V_C = \sqrt{P_R^2 + Q_L^2}$$

$$A_1 = I_1 V_C = \sqrt{R^2 + (Q_L^2 + Q_C^2)}$$



$$\sqrt{P_R^2 + Q_L^2} = \sqrt{P_R^2 + (Q_C + Q_L)^2} \Rightarrow Q_L^2 = (Q_C + Q_L)^2$$

dato che le pot sono uguali a destra e a sinistra

$$Q_L = |Q_L + Q_C|$$

$$Q_L = Q_L + Q_C \quad \text{e anche} \quad Q_L = -Q_L - Q_C$$

da cui si ricavano $Q_C = 0$ impossibile perché la C è soggetta a una tensione data dal problema e quindi assorbe energia reattiva.

la seconda soluzione invece dice $Q_L = -\frac{Q_C}{2}$

$$Q_C = \frac{V^2}{X_C} = \frac{(500 \text{ V}_2)^2}{-50} = -10 \text{ K VAR}$$

$$Q_L = -\frac{Q_C}{2} = +5 \text{ K VAR}$$

$$Q_L = -\frac{Q_C}{2} = +5 \text{ K VAR}$$

$$X_L = \frac{Q}{I_L^2}$$

$$X_L = \frac{Q}{I_L^2} = 50 \Omega$$

$$L = \frac{50}{\omega} = 50 \text{ mH}$$

$$\frac{V}{I} = |Z_{\text{serie L-R}}| = \sqrt{R^2 + X_L^2}$$

da cui $R = 50 \Omega$

Vediamo le potenze erogate dai generatori

La potenza attiva è dissipata solo da R quindi $P_J = P_R = RI_{A2}^2$

quindi

$$P_J = 50 \text{ kW}$$

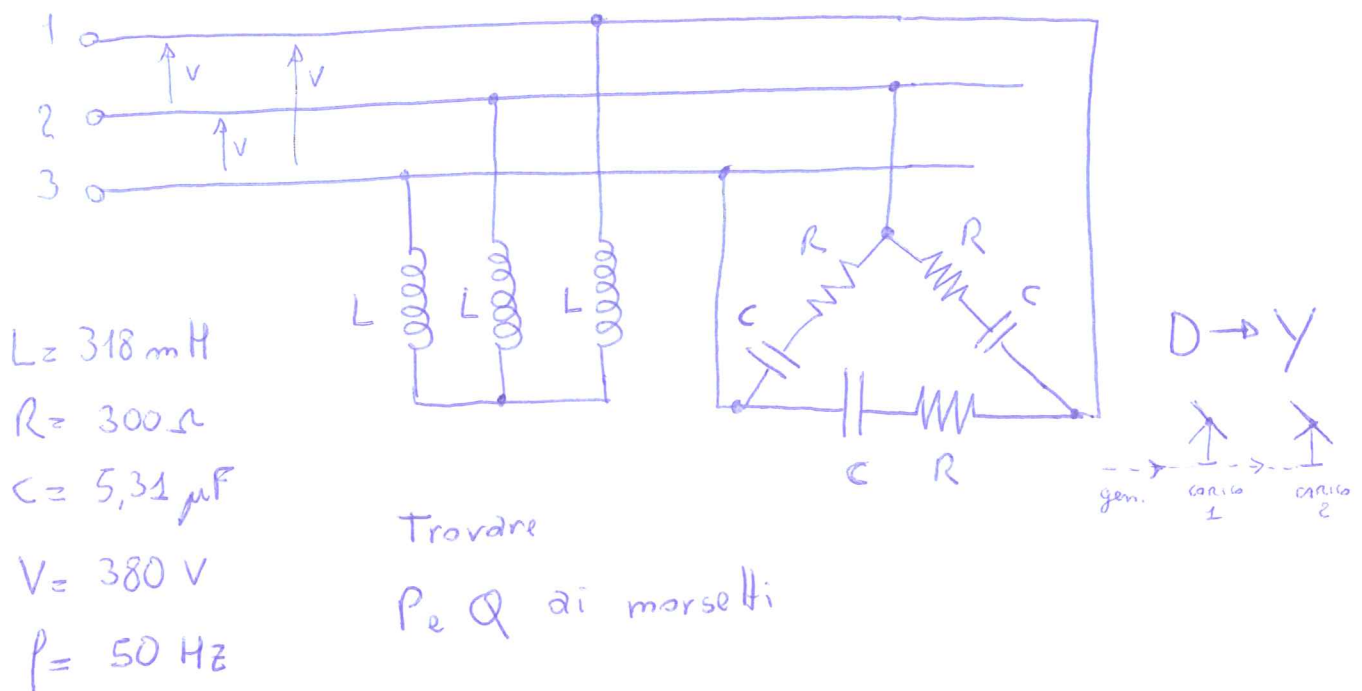
La

potenza

$$Q_J = Q_C + Q_L = 10000 + 5000 = -5 \text{ KVAR}$$

Vanno poi valutati i fattori nel diagramma fasoriale.

Esercizio sulle reti trifase

Soluzione

È dato il valore efficace della tensione concatenata. I carichi sono simmetrici ed equilibrati. Le eventuali correnti $\bar{I}_1, \bar{I}_2, \bar{I}_3$ saranno uguali e si può operare sulla rete monofase equivalente.

Dato che sono date le V concatenate significa che il generatore ha le fasi a triangolo e va portato a stella.

Poi si uniscono i centri stella per ottenere la monofase equivalente

La relazione esistente tra le impedenze triangolo e le imp. stella è la seguente:

$$\dot{Z}_{\Delta} = R + jX \Rightarrow \dot{Z}_{\lambda} = \frac{\dot{Z}_{\Delta}}{3} = \frac{R}{3} + j \frac{X_c}{3}$$

$$X_c = -\frac{1}{\omega C} = -600 \Omega$$

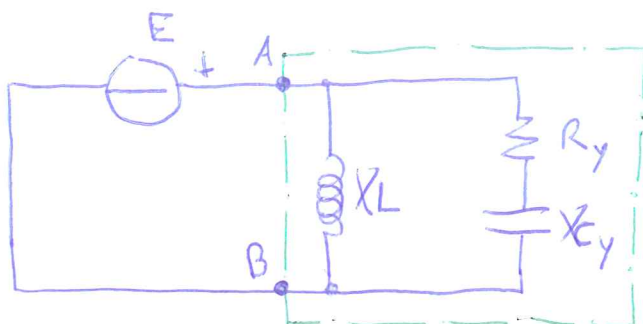
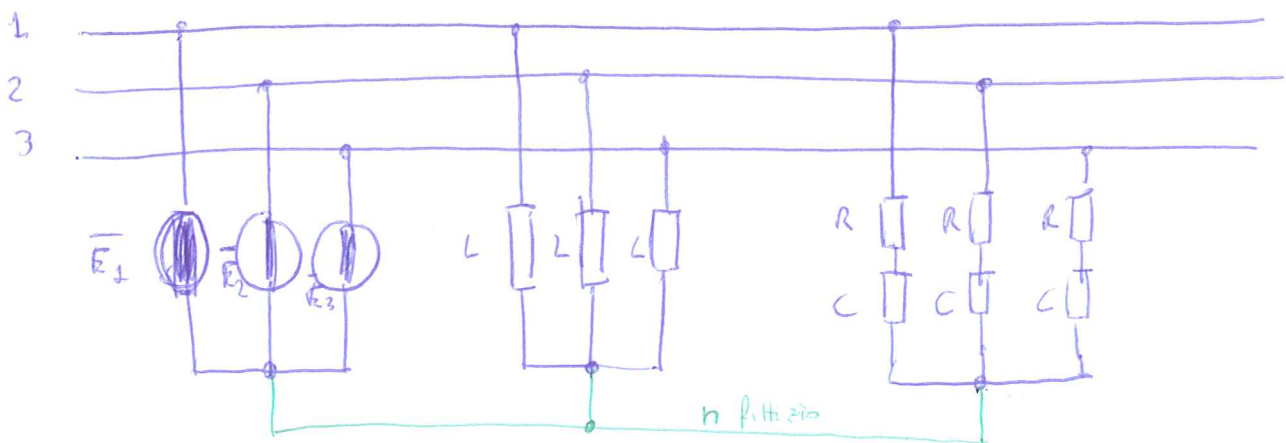
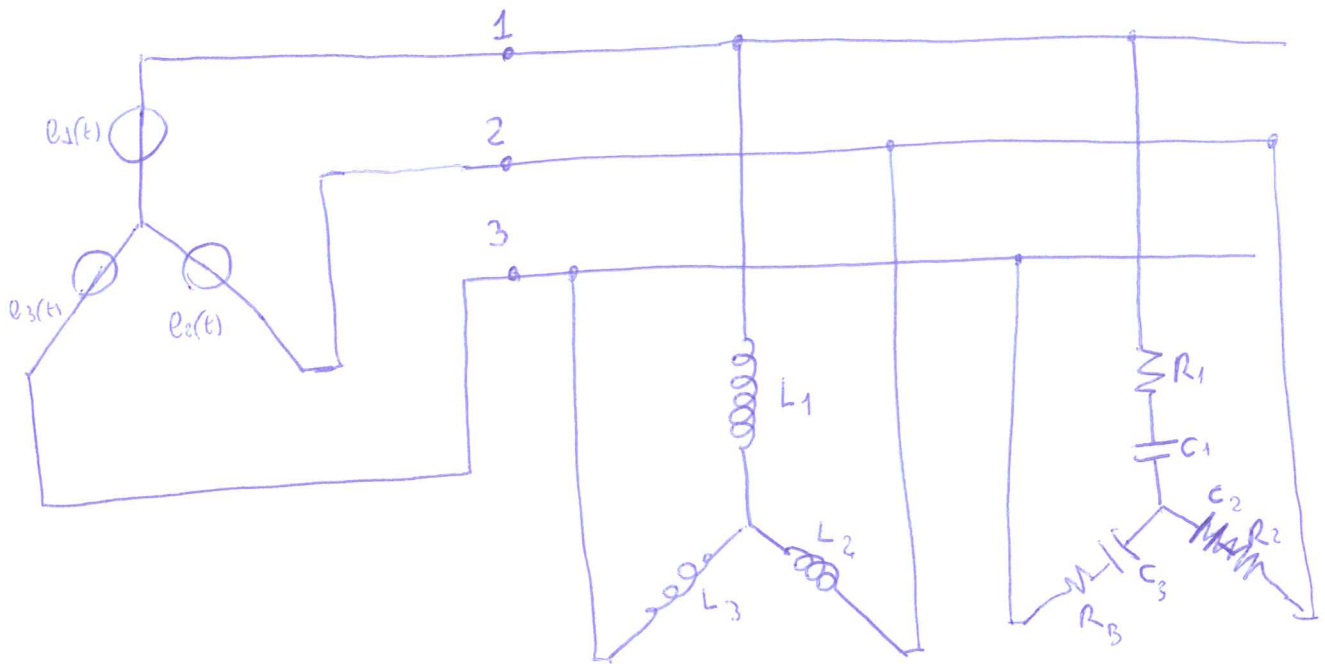
$$X_{c\lambda} = \frac{X_{c\Delta}}{3} = -\frac{600}{3} = -200 \Omega$$

$$R_y = \frac{R_{\Delta}}{3} = 100 \Omega \quad X_L = \omega L = 100 \Omega \quad \dot{Z}_y = (100 - 200j)$$

Se valore efficienza del generatore riportato a λ è dato da

$$E = \frac{V}{\sqrt{3}} = 220 \text{ V}$$

Adesso sono disponibili tutti i parametri per la rete monopase equivalente. Disegnamola qui sotto



$$\dot{Z}_{AB} = Z_L // (R_Y + jX_Y) = 50 // (1 + j3) = (50 + 15j)$$

$$\bar{E} = E e^{j0}$$

$$\bar{I} = \frac{\bar{E}}{\dot{Z}_{AB}} = (0,44 - 1,32j)$$

Abbiamo nella monofase equivalente il fasore di tensione e di corrente quindi troviamo la potenza complessa della monofase

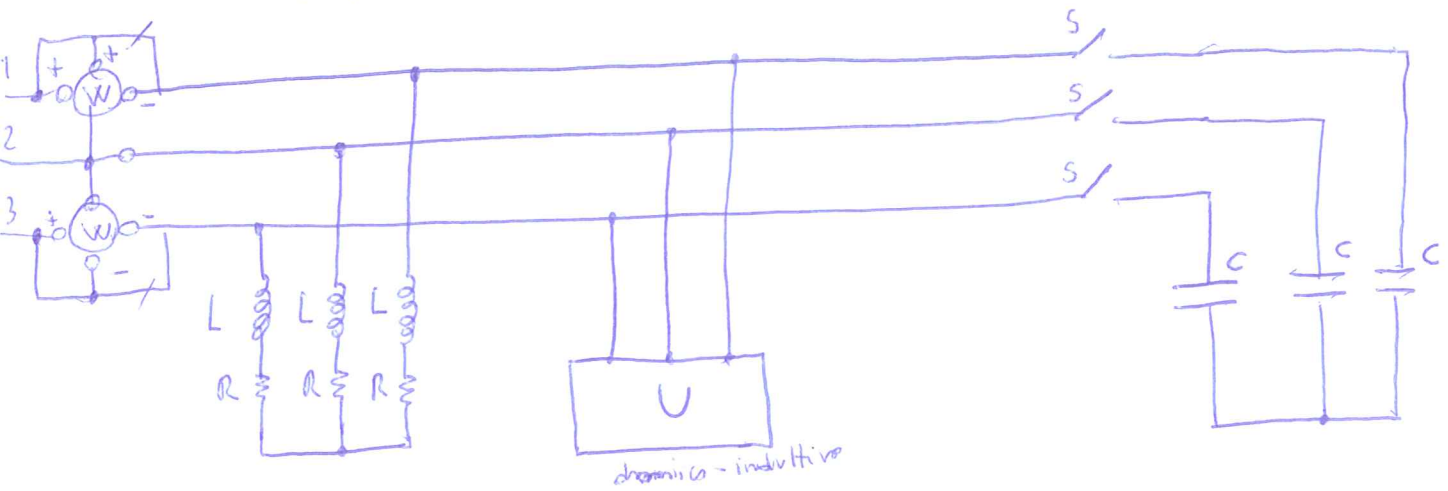
$$\begin{aligned} \dot{A} = \bar{E} \bar{I}^* &= P_M + jQ_M = 220 \cdot (0,44 + 1,32j) \\ &= 96,8 + j290,4 \end{aligned}$$

$$P = 96,8 \text{ WATT} \quad Q = 290,4 \text{ VAR}$$

Per trovare la potenza assorbita dalla rete trifase va moltiplicata per tre. quindi si ottiene

$$P = 3P_M = 290,4 \text{ W}$$

$$Q = 3Q_{M_{\text{monofase}}} = 871,2 \text{ VAR}$$



$$R = 3,6 \Omega$$

$$E = 210 V$$

$$X_L = 4,8 \Omega$$

$$\omega = 400 \frac{\text{rad}}{\text{sec}}$$

$$P_u = 4800 W$$

$$\cos \varphi = 0,8$$

Trovare

1) valore efficace I con S aperto

2) con S chiuso

3) C che rende minima I

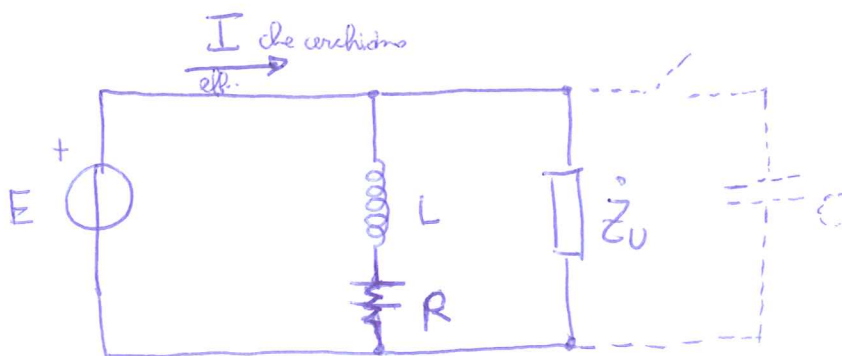
4) Indicazione dei Wattometri P_{12} P_{32}

ε è alimentato con una terna di

tensioni a stella quindi il

valore efficace dato è di $\bar{E}$ e non di $\bar{V}$

Svolgimento in due passaggi, prima con S aperto, sulla sua
monofase equivalente.



$$P_u = 3 E_u I_u \cos \varphi$$

↑ noto ↑ noto

$$\frac{P_u}{\cos \varphi} = E_u I_u$$

$$E_u \cdot I_u = \frac{4800}{0,8} = 6000$$

$$Q_u = E_u I_u \sin \varphi$$

$$\sin \varphi = \pm \sqrt{1 - \cos^2 \varphi}$$

$$Q_u = \frac{P_u}{\cos \varphi} \cdot \sqrt{1 - \cos^2 \varphi}$$

$$Q_u = 6000 \cdot \sqrt{1 - 0,64} = 3600 \text{ VAR}$$

$$\dot{Z}_{LR} = R + jX_L = (3,6 + j4,8) \Omega$$

$$I_{RL} = \left| \frac{\dot{E}}{\dot{Z}_{LR}} \right| = \frac{210}{6} = 35 \text{ A eff.}$$

Possiamo quindi calcolare la potenza attiva/reattiva del carico R-L

$$\vec{A} = P_{LR} + jQ_{LR} = R I_{RL}^2 + j X_L I_{RL}^2$$

$$\text{quindi } P = R I_{RL}^2 \quad Q_L = X_L I_{RL}^2 \quad P = 4410 \text{ W}$$

$$Q_L = 5880 \text{ VAR}$$

calcoliamo la potenza Apparente $A = EI = \sqrt{(3P)^2 + (3Q)^2}$ sulla mono fase
valori efficaci della rete trifase

$$A = \sqrt{(3P_R + P_U)^2 + (3Q_L + Q_U)^2} = 27,86 \text{ KVA} \quad \text{potenza apparente trifase}$$

$$A_M = \frac{A}{3} \quad \text{ovvero la potenza della rete mono fase equivalente, apparente}$$

$$= 9,286 \text{ KVAR}$$

nella mono fase con A_M troviamo una corrente $I_M = \frac{A}{3E} = 44,2 \text{ A}$

$$Q_{TOT} = 3Q_L + Q_U = 3 \cdot 5880 + 3600 = 21240 \text{ VAR}$$

$$Q_M = \frac{Q_{TOT}}{3} = 7080 \text{ VAR}$$

$$Q = \frac{E^2}{X_C} = -Q_{TOT \text{ Mono Fase}} = -7080$$

dal qui si ricava il valore della capacità stellata. $C = 401 \mu\text{F}$ (310)

ricordando che i WATT-REATTI sono in inserzione allora quindi si ha:

$$Q_{TOT} = \sqrt{3} (P_{32} - P_{21})$$

ARON

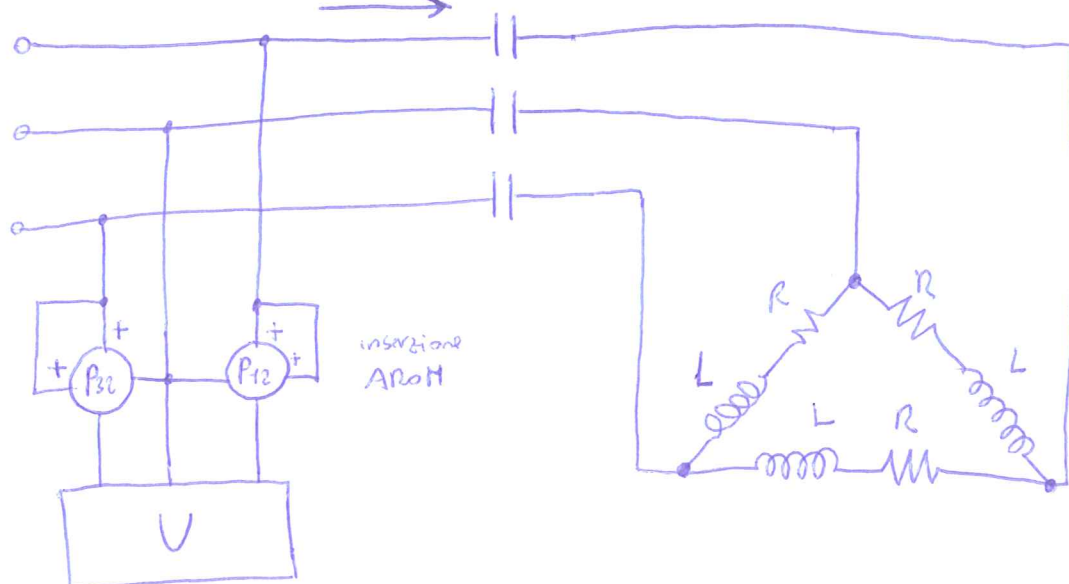
quindi $P_{32} = P_{21}$ per. $P_{TOT} = P_{12} + P_{32} = 3 \frac{P_{TOT}}{2} = 18030 \text{ WATT}$

quindi $P_{12} = P_{32} = \frac{P_{TOT}}{2} = \frac{18030}{2} = 9015 \text{ WATT.}$

$\omega = 1000$ la ricaduta dell'2
espressione di $i(t)$

$$i_1(t) = 10\sqrt{2} \sin(1000t)$$

$$f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{1000}{6,28} \\ \approx 160 \text{ Hz} \\ \omega = 2\pi f$$



$$C = 25 \mu\text{F}$$

$$L = 260 \text{ mH}$$

$$R = 120 \Omega$$

$$i_1(t) = 10\sqrt{2} \sin(1000t)$$

$$P_{12} = 10 \text{ kW}$$

$$P_{32} = 20 \text{ kW}$$

Trovare

- $V_{12}(t)$ conosciuta

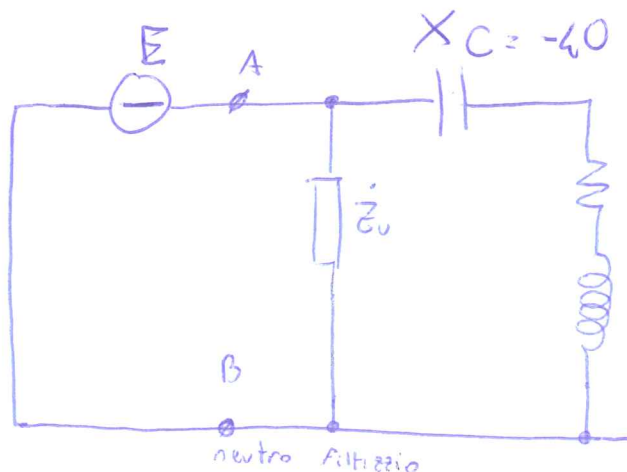
- P e Q assorbite

- C a triangolo per avere $\cos \varphi = 0,9$

La rete è simmetrica

Soluzione partiamo la rete a configurazioni stella per ogni
carico e ogni generatore tri fase e ricaviamo la rete monofase
equivalente.

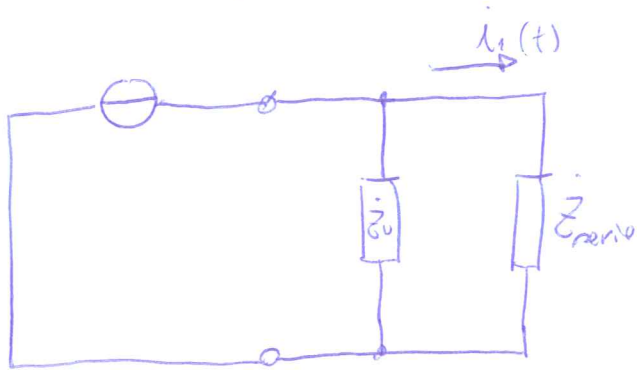
$$\bar{I}_1 = 10 e^{j0}$$



$$R_y = \frac{R}{3} = 40 \Omega$$

$$X_{ly} = \frac{X_{LD}}{3} = \frac{\omega L}{3} = 80 \Omega$$

Dato che $\dot{Z}_0$ è in parallelo al bipolo carico con soggette alla stessa tensione, quindi



$$\dot{Z}_s = R_y + jX_c + jX_L = 40 - 40j + 80j = 40 + 40j$$

$$\bar{E} = \dot{Z}_s \cdot \bar{I}_1 = 400 \sqrt{2} e^{j\frac{\pi}{4}}$$

il modulo è il prodotto dei moduli
e la fase è la differenza $\arctan\left(\frac{\text{imm}}{\text{re}}\right) = \phi$

calcoliamo la tensione della stella moltiplicandola per $\sqrt{3}$ e sfasando di $\frac{\pi}{6}$ rot.

$$V_{12} = \sqrt{3} \bar{E} \cdot e^{j\frac{\pi}{6}} = 400\sqrt{3} \sqrt{2} e^{j\frac{5}{12}\pi}$$

Nel dominio del tempo abbiamo.

$$v_{12}(t) = V_m \sin(\omega t + \varphi) = 800 \sqrt{3} \sin(\omega t + \frac{5\pi}{12})$$

Verifichiamo le potenze assorbite dalla rete

$$P_0 = P_{12} + P_{32} = 30 \text{ kW}$$

$$P_{0m} = \frac{P_0}{3} = 10 \text{ kW}$$

$$Q_m = \sqrt{3} (P_{32} - P_{12}) = 17320 \text{ VAR}$$

$$Q_{0m} = \frac{Q_0}{3} = 5770 \text{ VAR}$$

$$P_R = R I_1^2 = 4 \text{ kW}$$

$$P_{TOTm} = 4 \text{ kW} + 10 \text{ kW} = 14 \text{ kW}$$

$$Q_L = X_L I_1^2 = 8 \text{ KVAR}$$

$$Q_{TOTm} = (80 - 4 + 577) \text{ KVAR} = 977 \text{ KVAR}$$

$$Q_C = X_C I_1^2 = -4 \text{ KVAR}$$

in conclusione la P della trifase è

$$P = 3 P_m = 42 \text{ kW} \quad Q = 3 Q_m = 29,31 \text{ KVAR}$$

Aggiungiamo un carico di rifasamento dei ponti il $\cos \varphi = 0,9$

Lo collegiamo a triangolo ma per comodità a triangolo della pot. apparente $A = VI$ e alla attivo $P = VI \cos \varphi$ ricavo il $\cos \varphi$ attuale che devo rifasare

$$P = A \cos \varphi \quad A = \sqrt{P^2 + Q^2} = 17072 \text{ VA}$$

sulla
monofase

$$\cos \varphi = \frac{P}{A} = 0,82$$

$$\text{La potenza reattiva } Q = A_m \sin \varphi = \frac{P_m}{\cos \varphi} \sin \varphi = P \tan \varphi$$

$$\text{calcoliamo la tangente } \varphi \text{ che } \bar{Q} = \frac{P}{P} = \tan \varphi$$

$$\tan \varphi = \frac{Q}{P} = 0,698$$

adesso vogliamo rifasare ovvero cambiare il $\cos \varphi$ nel richiesto $= 0,9$ aggiungiamo una capacità, la potenza attiva rimane invariata si modifica la potenza reattiva. Anche l'apparente cambia.

$$Q'_m = A'_m \sin \varphi'$$

$$= \frac{P_m}{\cos \varphi'} \sin \varphi' = P_m \tan \varphi'$$

calcoliamo φ' come $\arccos \varphi' = 0,9$ e si calcola $\tan \varphi'$

$$\tan \varphi' = \tan(\arccos \varphi') = 0,484$$

La nuova Q è data dalla vecchia Q meno fase più la Q_c

$$Q_m' = Q_m + Q_c'$$

Risolviamo la $Q_c \rightarrow$

$$Q_c = Q_m' - Q_m$$

Quindi possiamo scrivere

$$Q_c' = P(\tan \varphi' - \tan \varphi)$$

formula per il rifasamento

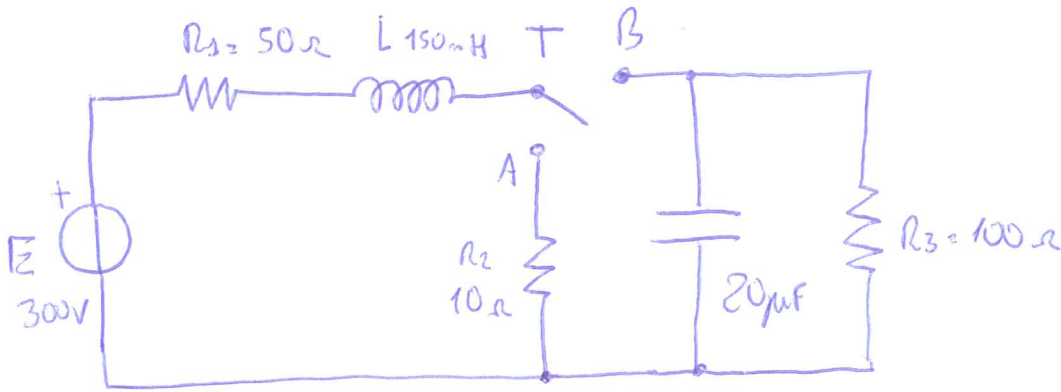
si ottiene $Q_c' = 2996 \text{ VAR}$

$$Q_c' = \frac{E^2}{X_c'} \quad \text{da cui si ricava la } C \text{ della manofase stellata}$$

si ottiene $C_{\text{stellata}} = C_m = 9,36 \mu\text{F}$

quindi la $C_D = \frac{1}{3} C_Y$ quindi viene $\cong 3,12 \mu\text{F}$

$$C_D \cong 3,12 \mu\text{F}$$



trovare $V_{AB}(t)$ per $t > 0$

sapendo che per $t < 0$ T è in B

$t = 0$ T commuta in A

$t > 0$ T è in A

Soluzione: Vi sono due topologie da esaminare, quella prima e quella dopo la commutazione di T

per $t > 0$ vogliamo la $V_R(t)$ e la $V_C(t)$ perché...

$$V_{AB}(t) = V_R(t) - V_C(t)$$

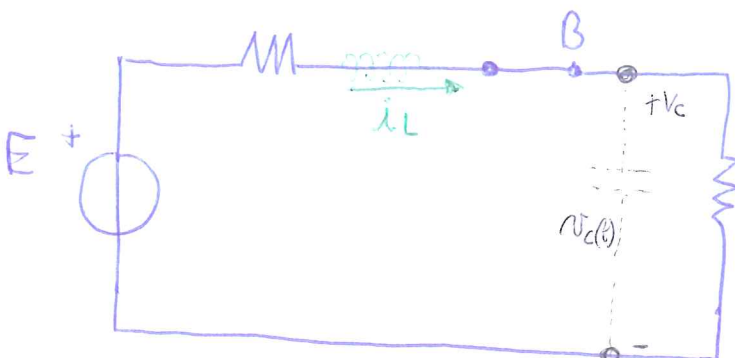
Analizziamo la rete prima dell'istante critico

Ridimensioniamo la rete con l'interruttore T in B. La rete è in reg. stazionario.

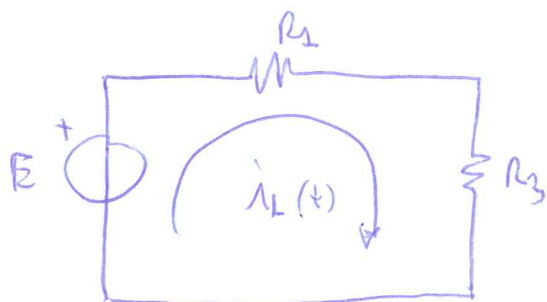
L'induttore va in cortocircuito

Il condensatore è un aperto

Vogliamo trovare $V_C(t)$ per $t < 0$ e $i_L(t)$ per $t < 0$.



La corrente nella maglia è coincidente con la $i_L(t)$, applichiamo la LKT e ricaviamo la $i(t)$



$$i_L(t) R_1 + i_L(t) R_3 - E = 0$$

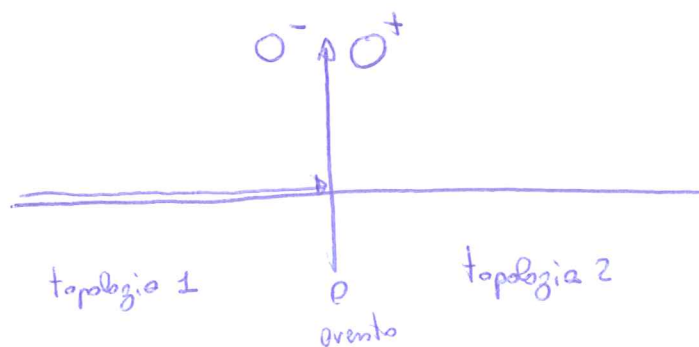
$$i_L(t) (R_1 + R_3) = E$$

$$i_L(t) = \frac{E}{R_1 + R_3} = 2A$$

La $V_C(t)$ la ricaviamo con la legge di Ohm dato che sono in parallelo con R_3

$$V_C(t) = i_L(t) \cdot R_3 = 200V \quad t < 0$$

Potremmo anche applicare la formula del partitore di tensione.



$t=0$ è l'evento critico e dato che non ci sono (si è soppresso così) eventi impulsivi, allora per continuità la corrente prima e dopo l'evento critico è uguale

$$2A = i_L(0^-) = i_L(0^+) = 2A$$

$$200 \text{ V} = v_c(0^-) = v_c(0^+) = 200 \text{ V}$$

prima di t_0

per continuità

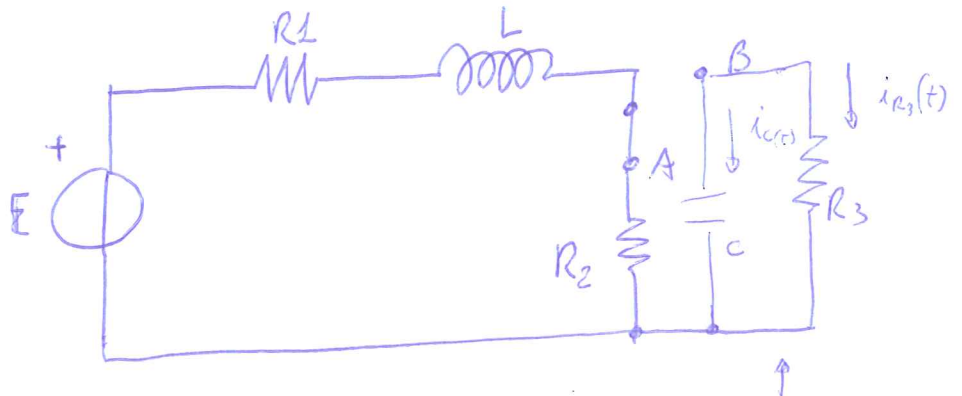
dopo di t_0

Adesso si sposta il tasto T_0 e la rete cambia topologia

$$t = 0$$

$$v_c(0^+) = 200 \text{ V}$$

$$i_L(0^+) = 2 \text{ A}$$



non trascurarlo
nel disegno
perché c'è
dissipazione dovuta
a R_3 .

cerchiamo le tensioni $v_B(t)$ e $v_c(t)$ per $t > 0$
relative alle due sottoreti.

ci vogliono due equazioni differenziali.

$$\text{vale } v_{AB}(t) = v_R(t) - v_c(t) \quad t > 0$$

$$i_c = C \frac{dv_c(t)}{dt}$$

$$i_L = L \frac{dv_L(t)}{dt}$$

giustifico la
presenza della seconda
sottorete che sembra
disgiunta.

Risolviamo le eq. diff.

$$v_{R3}(t) \text{ e la tensione su } R_3 \text{ e vale } v_c(t) = v_{R3}(t)$$

$$\text{possiamo scrivere } v_c(t) - v_{R3}(t) = 0 \quad * \quad v_c(t) = R_3 i_{R3}(t)$$

$$\text{vale anche } i_{R3} = -i_c(t)$$

sostituendo sull'eq. * si ha:

$$v_c(t) + R_3 C \frac{dv_c(t)}{dt} = 0$$

eq. differenziale
omogenea (posta uguale
a zero) perché non
stanno agendo generatori.

introduciamo il parametro S

$$1 + R_3 C \cdot S = 0$$

"TAU"

$$\text{con } S = -\frac{1}{RC}$$

con $R_3 C = \tau$ costante di tempo
con unità di misura [s]

La soluzione deriva da una famiglia di funzioni che rappresentano la $v_C(t)$ identificate dal valore di K in

$$v_C(t) = K e^{-\frac{t}{\tau}}$$

non esiste l'integrale particolare dato che l'equazione di partenza è omogenea. Rimane da trovare il valore del coefficiente K .

$$K = 200 \text{ V} \quad \text{perché} \quad e^{-0} = 1$$

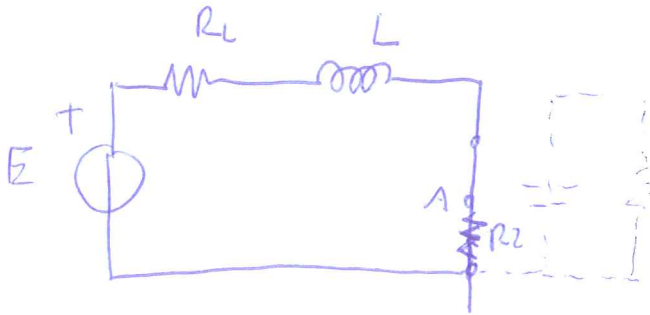
$$v_C(t > 0) = 200 e^{-\frac{t}{\tau}} =$$

$$\text{con} \quad \tau = R_3 C = 2 \cdot 10^{-3} \text{ sec}$$

$$\text{Adesso calcoliamo la } v_{R_2}(t) = R_2 \cdot i_{R_2}(t)$$

ma $i_{R_2}(t) = i_L(t)$ quindi troviamo l'espressione per
la corrente $i_L(t)$

$$i_L = C \frac{dv_C(t)}{dt} \quad v_C = L \frac{di_L(t)}{dt}$$



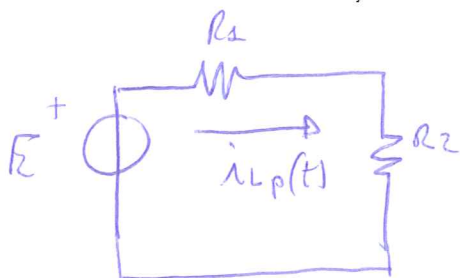
$$E + R_1 di_L(t) + v_L(t) + R_2 i_L(t) = 0$$

$$-E + (R_1 + R_2) i_L(t) + L \frac{di_L(t)}{dt}$$

↑
termine forzante, l'equazione non è omogenea quindi c'è la i_L particolare più la i_L dell'omogenea associata.

$$i_L(t) = i_{Lp}(t) + i_{Lo}(t)$$

L'integrale particolare coincide con la soluzione della rete in regime stazionario con la rete solo resistiva.



$$i_{Lp}(t) = \frac{E}{(R_1 + R_2)} = 5A$$

Passiamo all'operatore S e otteniamo il polinomio, che sarà una eq. diff. di ordine 1.

$$(R_1 + R_2) + L \cdot S = 0 \quad \text{con} \quad S = - \frac{R_1 + R_2}{L}$$

$$\text{con} \quad \tau_L = \frac{L}{(R_1 + R_2)} = 2,5 \cdot 10^{-3} \text{ secondi}$$

quindi l'equazione diff. ha soluzione.

$$i_{L0}(t) = K_L e^{-\frac{t}{\tau_L}}$$

quindi la $i_L(t)$ per $t > 0$ è pari a:

$$i_L(t) = i_{Lp}(t) + i_{L0}(t) = 5 + K_L e^{-\frac{t}{\tau_L}}$$

Per trovare la costante K_L :

$$i_L(0^+) = 5 + K_L e^{-\frac{0}{\tau_L}} = 2A$$

$$\text{dato che } e^{-0} = 1$$

$$5 + K_L = 2 \rightarrow K_L = -3$$

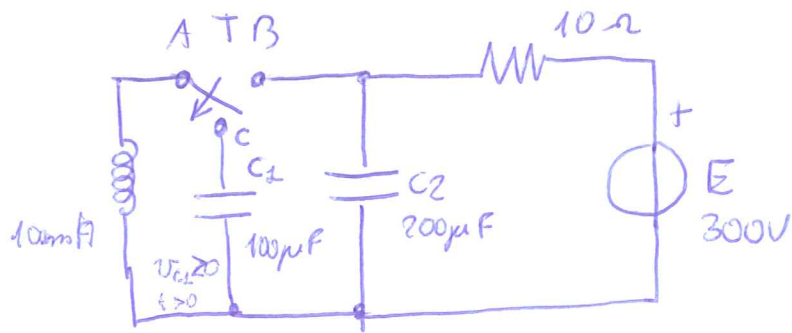
$$i_L(t) = 5 - 3e^{-\frac{t}{\tau_L}} \quad t > 0$$

quindi, come espresso in precedenza, si ha:

$$v_{AB}(t) = v_{R2}(t) - v_C(t) = 50 - 30e^{-\frac{t}{\tau_L}} - 200e^{-\frac{t}{\tau_C}} \quad t > 0$$

che è la soluzione richiesta.

ESERCIZIO SIERI



$$i_c = C \frac{dv_c}{dt}$$

$$v_L(t) = L \frac{di_L(t)}{dt}$$

$W_{C1} = 0,5 J$ inizialmente è carica

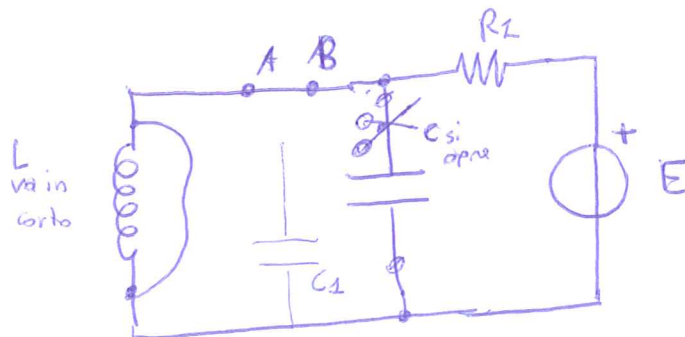
Trovare $v_{AB}(t)$ per $t > 0$

sapendo che per $t < 0$ T è in B

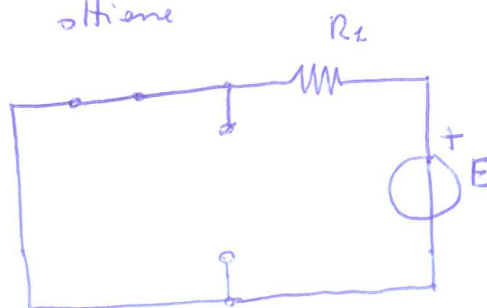
$t < 0$ T commuta in C

$t > 0$ T è in C

Soluzione: per $t < 0$ la rete diventa:



quindi si ottiene



nella rete in $t < 0$
andiamo a calcolare

$$v_{C2}(t < 0)$$

$$v_{C1}(t < 0)$$

$$i_L(t < 0)$$

Per $t < 0$ la tensione su $C2$ è zero perché è in parallelo al corto, la v_{C1} la ricaviamo dall'espressione dell'energia

$$W_C = \frac{1}{2} C V^2 \rightarrow V = \sqrt{\frac{2W_C}{C}} = 100V \quad (322)$$

$$i_L(t < 0) = \frac{E}{R_1} = 30 \text{ [A]}$$

perché è come se L fosse in corto.

$$v_{C_1}(0^-) = 100 \text{ V}$$

$$v_{C_2}(0^-) = 0 \text{ V}$$

$$i_L(0^-) = 30 \text{ A}$$

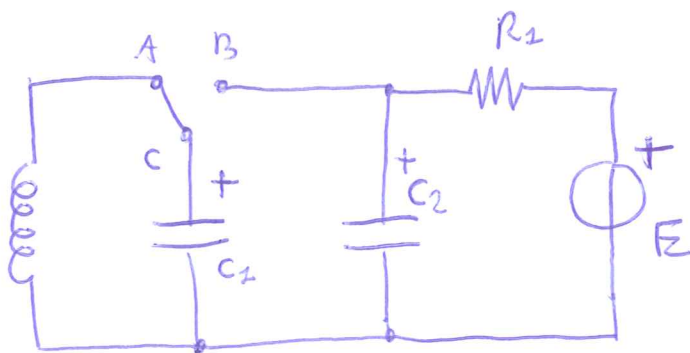
Presumiamo che non ci siano fenomeni impulsivi

quindi, per continuità si ha:

$$i(0^-) = i(0^+) = 30 \text{ A}$$

$$v_{C_2}(0^-) = v_{C_2}(0^+) = 0 \text{ V}$$

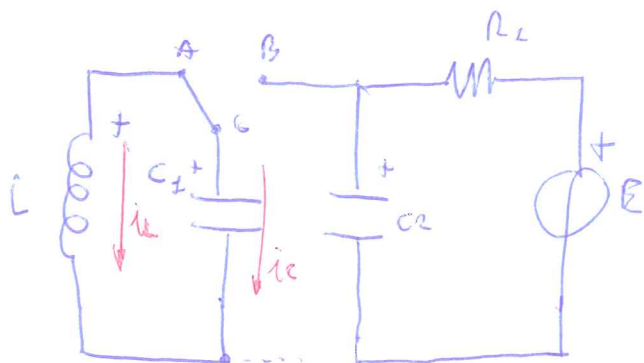
$$v_{C_1}(0^-) = v_{C_1}(0^+) = 100 \text{ V}$$



$$v_{AB}(t) = v_{C_1}(t) - v_{C_2}(t)$$

$v_{C_1}(t)$ e $v_{C_2}(t)$ va analizzata (per $t > 0$, coincidono con $v_{C_1}/t > 0$)

ci sono in $t > 0$ due saltarelli



ci sono quindi due equazioni differenziali. mettiamo i riferimenti per le correnti e le tensioni.

$$v_{c1}(t) = v_L(t) = L \frac{di_L(t)}{dt}$$

$$i_{c1}(t) = -i_L(t)$$

$$= -L \frac{di_{c1}(t)}{dt}$$

$$\text{dato che } i_{c1} = C_1 \frac{dv_{c1}(t)}{dt}$$

sostituendo si ha:

$$v_{c1}(t) = -L \frac{d}{dt} \left(C_1 \frac{dv_{c1}}{dt} \right) = -LC_1 \frac{d^2 v_{c1}}{dt^2}$$

e' del secondo ordine

$$v_{c1} + LC_1 \frac{d^2 v_{c1}(t)}{dt^2} = 0$$

equazione omogenea del secondo ordine.

L'integrale particolare è zero quindi non si calcola

L'integrale della omogenea è risolvibile usando il parametro s che semplifica il calcolo

$$1 + LC_1 s^2 = 0$$

$$1 + LC_1 s^2 = 0 \rightarrow s^2 = -\frac{1}{LC_1}$$

$$\text{quindi } s = \sqrt{-\frac{1}{LC_1}} = \pm j \sqrt{\frac{1}{LC_1}}$$

ho due radici complesse coniugate. si ottiene $\omega_0 = \sqrt{\frac{1}{LC_1}} = 1000 \frac{\text{rad}}{\text{sec}}$ (324)

validiamo la forma della V_{c1} nel caso delle due soluzioni complesse coniugate.

$$V_{c1}(t) = A \cos \omega_0 t + B \sin \omega_0 t$$

Ora si devono calcolare le costanti A e B

con ogni condizione iniziale calcolo una costante.

$$100 = V_{c1}(0^+) = A \cos \omega_0 0 - \cancel{B \sin \omega_0 0}$$

si ottiene la seconda parte

si ricava $A = 100 \text{ V}$

Validiamo la seconda costante " B " che ricavo dalla condizione iniziale i_L che era:

$$i_L = -i_C = -C \frac{dV_C}{dt} = -C \left(\frac{d}{dt} (A \cos \omega_0 t + B \sin \omega_0 t) \right)$$

$$= -C \left[A \omega_0 (-\sin \omega_0 t) + B \omega_0 \cos \omega_0 t \right]$$

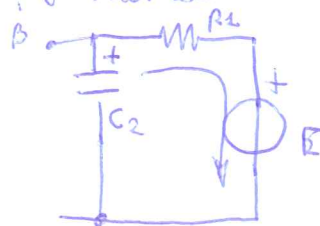
questo si annulla al prossimo passaggio

$$30 = i_L(0^+) = C B \omega_0 \quad B = \frac{30}{C \omega_0} = -300 \text{ V}$$

Quindi la $V_{c1}(t) = 100 \cos \omega_0 t - 30 \sin \omega_0 t$

Adesso cerchiamo il secondo termine di $V_{AB}(t) = V_{c1}(t) - V_{c2}(t)$

quindi $V_{c2}(t)$



$$E + R_1 i_{R1} - V_{c2}(t) = 0$$

$$E - R_1 i_{C2}(t) - V_{c2}(t) = 0$$

$$E = R_1 C \frac{dV_{c2}(t)}{dt} + V_{c2}(t)$$

$$V_{c2} \text{ particolare per } t > 0 = 0 \quad V_{c2p}(t) = E$$

325

$$R_1 C_2 \frac{dV_{c2}(t)}{dt} + V_{c2}(t) = 0$$

$$s = \frac{1}{R_1 C_2} \quad \gamma = R_1 C_2 \omega = 0$$

$$v_{c2}(t) = A e^{-\frac{t}{\tau}}$$

$$v_{c2p}(t) = E$$

$t > 0$

$$v_{c2} + v_{2p} + v_{20} = E + A e^{-\frac{t}{\tau}} \quad A = -E$$

$$0 = v_{c2}(0^+) = E + A e^{-\frac{t}{\tau}} = E + A$$

quindi

$$v_{c1}(t) = 100 \cos \omega_0 t - 30 \sin \omega_0 t$$

$$v_{c2}(t) = E \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}} \right) = 300 \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}} \right)$$

Abbiamo $v_{c1}(t)$ e $v_{c2}(t)$ quindi

$$v_{AB}(t) = v_{c1}(t) - v_{c2}(t) = 100 \cos \omega_0 t - 300 \sin \omega_0 t - 300 \cdot (1 - e^{-\frac{t}{\tau}})$$

non essendoci resistori nella maglia L-C non c'è teoricamente dissipazione e si innescava una oscillazione.

21/05/2012

Prof. Daghiero

La lezione inizia alla pag 328

grid parity $\rightarrow$ quando l'energia fotovoltaica va a paragonare come costo l'energia che viene normalmente prodotta dalla rete.

Appendice del testo Guadagni Stella

Richiami di Analisi vettoriale

Si inizia l'argomento ampi.

Si accenna all'analisi Fourier

Se si alimenta una rete con un'onda quadrata o con

Fourier è alimentata con infinite sinusoidi e quante

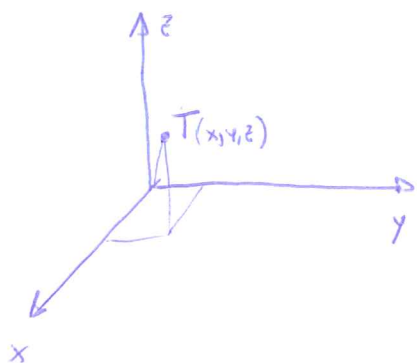
si usano i metodi dell'analisi sinusoidale ma ripetute

più volte ancora sulle frequenze principali

Campi scalari in $\mathbb{R}^3$ dipende dal punto $P(x,y,z)$ e dal tempo t

$f(P,t)$ con $P(x,y,z)$ con f grandezza scalare

ad esempio una temperatura.



Se il campo è stazionario allora $t = \text{cost}$ quindi non c'è evoluzione nel tempo

Se invece ho una grandezza vettoriale allora ho un campo vettoriale nell'insieme tridimensionale. Per identificarlo non solo per valore ma anche per intensità e verso

campi di tipo: $\vec{E}$, $\vec{B}$, $\vec{H}$, $\vec{D}$, $\vec{Q}$, $\vec{J}$
 elettricità intensità magnetica spostamento campo di densità di carica
 o di induzione

Si riassuma in

$\vec{E}, \vec{J}, \vec{D}, \vec{H}, \vec{B}$

$$\lim_{\Delta T \rightarrow 0} \frac{\Delta \Phi}{\Delta T} = \oint (\vec{B}, t)$$

Definizione di superfici di livello $\mathbb{R}^3$ (o linee di livello in $\mathbb{R}^2$)

Definite per campi scalari su superfici $f(P,t) = C(t)$ ha un unico valore, quindi due superfici di livello non si possono mai intersecare.

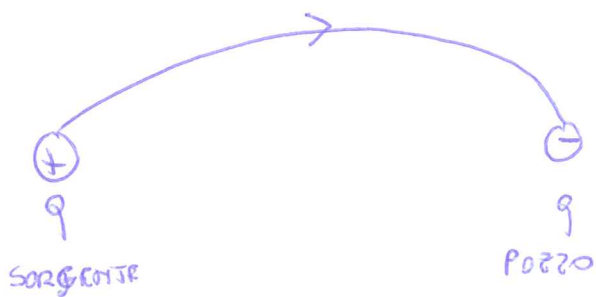
Le linee di campo invece sono linee lungo le quali il campo è tangente



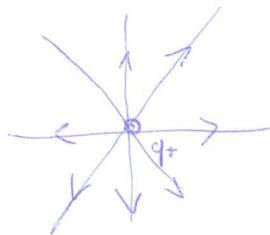
Le linee di campo possono formare delle linee chiuse
come è obbligatorio per il campo densità di corrente perché
c'è corrente solo in circuiti chiusi.

La corrispondente grandezza puntuale della corrente è la densità di
corrente ed è quindi anche essa definita in un percorso chiuso.

Pozzi e Sorgenti (del campo)

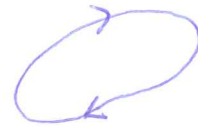


nelle correnti isolate le linee di campo possono essere di
lunghezza infinita.



si vede la sorgente ma
i pozzi sono all'infinito

Quando le linee sono chiuse
su se stesse e quindi non si
possono trovare punti di sorgente
o di pozzo sono detti solenoidali
come su H e B



Prodotto vettoriale o scalare

Il prodotto è scalare fra due vettori quando il risultato è uno
scalare, se invece si ottiene un terzo vettore è vettoriale

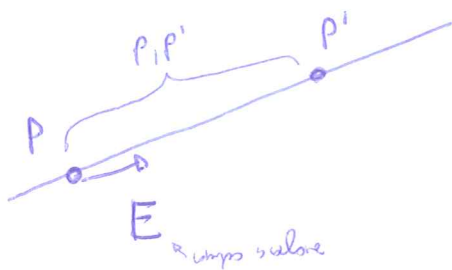
$\vec{a} \cdot \vec{b}$ è uno scalare mentre $(\vec{a} \times \vec{b})$ è vettoriale

concetti integrali principali

- 1) Derivata direzionale (+ origina il gradiente)
- 2) integrale di linea e circolazione (rotore)
- 3) flusso e flusso uscente (divergenza)

DERIVATA DIREZIONALE DI UN CAMPO SCALARE

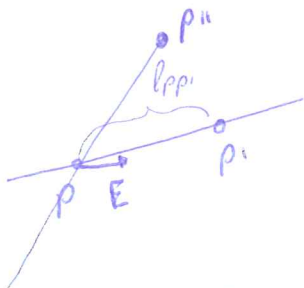
consideriamo un campo scalare ed una retta passante per il punto P e orientata dal vettore tangente $\vec{t}$



La derivata direzionale del campo $f(P, t)$ secondo la direzione indicata da $\vec{t}$

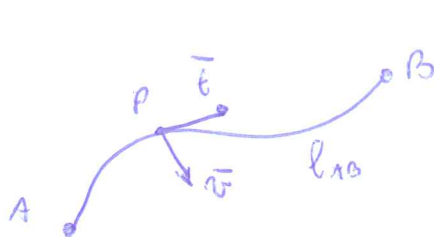
$$\frac{\partial f(P, t)}{\partial l} \Big|_{\vec{t}} \triangleq \lim_{l_{PP'} \rightarrow 0} \frac{f(P', t) - f(P, t)}{l_{PP'}}$$

Se cambia la direzione cambia la derivata, quindi esprime come la grandezza varia andando in una certa direzione.



concetto di integrale di linea

CIRCOLAZIONE



$$\Gamma_{AB} = \int_A^B \vec{v}(P, t) \cdot \vec{t} \, dl$$

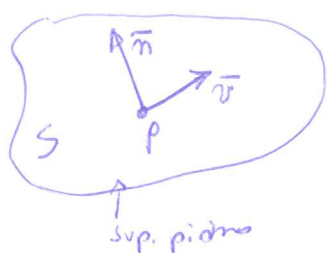
gamma maiuscolo

Se la linea $\bar{c}$ chiusa si definisce la circolazione.

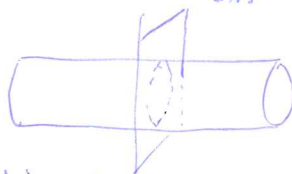
$$\Gamma_c = \oint_{\bar{c}} \vec{v}(p,t) \cdot \vec{\bar{t}} dl$$

è il concetto legato al rotore
ovvero dice quanto il campo è
contorto o vorticoso, quanto
può produrre vortici.

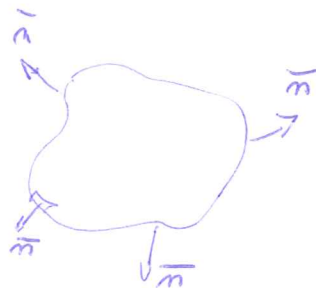
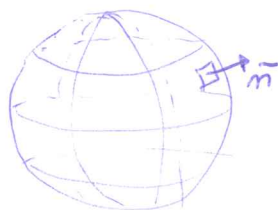
Flusso uscente da una superficie chiusa ovviamente si parla di
una grandezza vettoriale che integrata diventa scalare, quindi il flusso è
SCALARE



$$\phi_{S_m}(t) = \int_{S_m} \vec{v}(p,t) \cdot \vec{n} ds$$



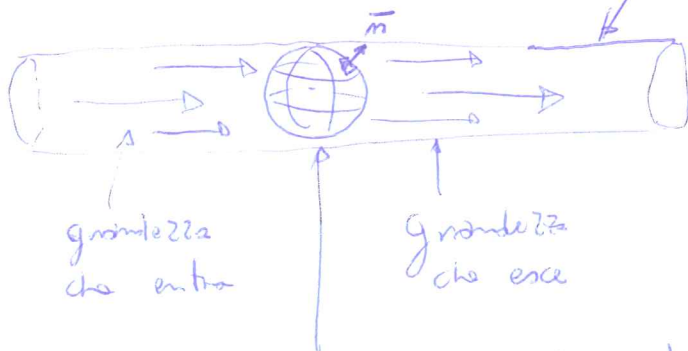
Se prendo una superficie chiusa, valuto il flusso uscente
dalla superficie chiusa.



$$\phi_{S_c}(t) = \oint_{S_c} \vec{v}(p,t) \cdot \vec{n} ds$$

non dipende
dal punto

TUBO DI FLUSSO



grandezza
che entra

grandezza
che esce

Flusso = scambio tra entra esce = ZERO

Assomiglia a un Kirchhoff.

Risolvere un campo significa che tramite equazioni differenziali che contengono gli operatori rotore, gradiente, divergenza, valutare per ogni punto dello spazio il valore del campo in direzione intensità e verso.

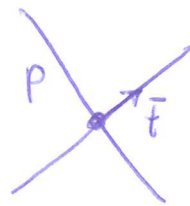
DERIVATA DIFFERENZIALE DI UN CAMPO SCALARE

Arriviamo al concetto di gradiente

Si prende il punto P di un campo scalare dove è definita la funzione $f(P,t)$ e identifica la direzione in cui è massima la derivata direzionale.

Trovo uno dei vettori $\vec{t}$ per cui si massimizza la derivata direzionale indicò questo vettore $\vec{t}$ con $\vec{u}_{grad}$

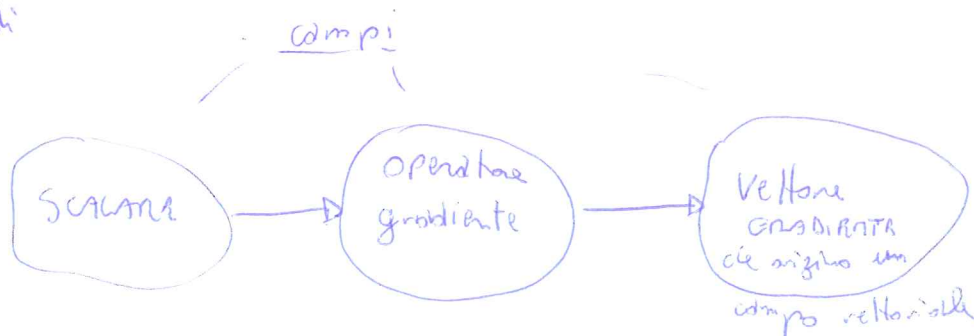
$$\vec{t} = \vec{u}_{grad}$$



$$grad f(P,t) \triangleq \max \left\{ \frac{\partial f}{\partial t} \right\} \Big|_{\vec{u}_{grad}}$$

Dato che si riferisce, come risultato, a un vettore che è $\vec{u}_{grad}$ allora si ottiene un vettore gradiente.

Quindi



Il vettore gradiente è normale alle superfici di livello e identifica la direzione di massima ~~diretta~~ crescita della funzione scalare e il suo modulo mi identifica l'intensità di variazione.

$$\text{grad } f(p, t) = \frac{\partial f}{\partial x} \bar{u}_x + \frac{\partial f}{\partial y} \bar{u}_y + \frac{\partial f}{\partial z} \bar{u}_z$$

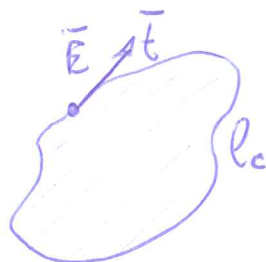
funzione scalare di origine
es. temperatura

componenti del vettore gradiente

Rotore di un campo "vettoriale"

Si applica solo a campi vettoriali.

Vediamo di iniziare dalla circolazione



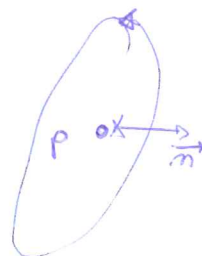
$$\Gamma_{C_c}(t) = \oint \vec{v}(p, t) \cdot \vec{t} \, dl$$

è orientata secondo
la regola del
cavalierino o della
vite destrorsa della
manina destra.

Se all'interno della circolazione troviamo un punto p e cerchiamo
più volte attorno a p anche non complanari.

Posso fare il rapporto tra la circolazione e la superficie S_c che
poi passo al limite per S_c che tende a zero

$$\lim_{S_c \rightarrow 0} \frac{\Gamma_{C_c}}{S_c}$$



Esiste una direzione lungo la quale il rapporto tra circolazione
e la superficie è massimo.

Si definisce rotore ROT o CURL di $\vec{v}(p, t)$ come

$$\text{rot } \vec{v}(p, t) \triangleq \max \left\{ \lim_{S \rightarrow 0} \frac{\oint_{C_c} \vec{v}(p, t) \cdot \vec{t} \, dl}{S} \right\} \cdot \vec{u}_{\text{rot}}$$

Viene calcolata lungo la direzione in cui il campo è più vorticoso.

TROVARE IL ROTORE

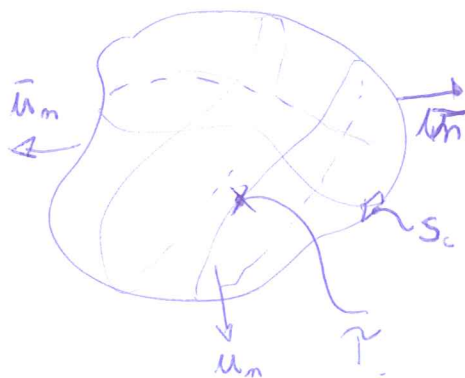
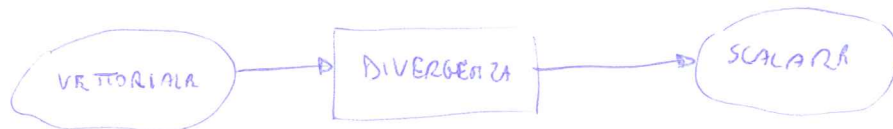
$$\begin{vmatrix} u_x & u_y & u_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ v_x & v_y & v_z \end{vmatrix}$$

$$\Rightarrow \left(\frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z} \right) u_x + \left(\frac{\partial u_z}{\partial x} - \frac{\partial u_x}{\partial z} \right) u_y + \left(\frac{\partial u_y}{\partial x} - \frac{\partial u_x}{\partial y} \right) u_z$$

DIVERGENZA

si applica al campo vettoriale e restituisce uno scalare

CAMPI



$$\phi_{S_c}(t) = \oint_{S_c} \vec{u}(P, t) \cdot \vec{n} \, ds$$

↑
sup. chiusa

$$\text{div } \vec{u}(P, t) \triangleq \lim_{V \rightarrow 0} \frac{\oint_{S_0} \vec{u}(P, t) \cdot \vec{n} \, ds}{V}$$

↑
Integral di superficie

è un volume identificato dalla superficie chiusa S_c

Indica dove ci sono sorgenti ($\text{div} > 0$) del campo e $\text{div} < 0$ indica pozzi del campo. Se la divergenza è nulla ci sono solo linee di campo che passano (in transito) oppure non ci sono, quindi c'è assenza del campo.

Espressione estesa della divergenza

$$\text{div}(\mathbf{f}, t) = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z}$$

Come si nota non ci sono i vettori e quindi la somma non è un vettore ma è uno scalare.

L'operatore nabla ∇

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x} \bar{u}_x + \frac{\partial}{\partial y} \bar{u}_y + \frac{\partial}{\partial z} \bar{u}_z$$

Inoltre l'operatore nabla si definisce rapidamente e senza ambiguità gli operatori grad, rot, div.

$$\text{grad } f(\mathbf{r}, t) = \nabla f$$

$$\text{rot } \vec{v}(\mathbf{r}, t) = \nabla \times \vec{v}$$

$$\text{div } \vec{v}(\mathbf{r}, t) = \nabla \cdot \vec{v}$$

In coordinate cartesiane, ma con opportune modifiche vale anche in coordinate cilindriche o sferiche.

teoremi di Stokes e di Gauss
detti teoremi del rotore e della
divergenza.

Cambiamo l'ordine di derivazione o
di dimensione $1D \rightarrow 2D$ $3D \rightarrow 2D$

TEOREMA DI STOKES

l'integrale esteso ad una sup. orientata da $\vec{l}$ è pari alla circolazione fatta sulle sup. che ha per bordo l , quindi il flusso del rotore

$$\int_{S_l} \nabla \times \vec{v} \cdot \vec{n} \, ds = \oint_{l_c} \vec{v}(p,t) \cdot \vec{t} \, dl$$

integrale di superficie

integrale di linea

STOKES

ROTORE

Il teorema della divergenza di Gauss invece riduce le dimensioni di integrazione.

$$\int_{\tau_s} \text{div} \vec{v}(p,t) \, d\tau = \int_{S_l} \vec{v}(p,t) \cdot \vec{n} \, ds$$

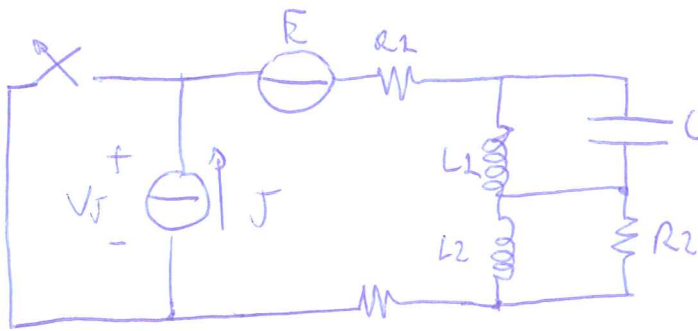
integrale volumico

integrale di superficie

GAUSS

divergenza

Regime d'iperperiodico e stazionario iniziale



Trovare

$i_{L1}(t)$

$i_{L2}(t)$

$v(t)$ e $v_J(t)$

in $t > 0$ T aperto

$L_1 = 100 \text{ mH}$

$L_2 = 20 \text{ mH}$

$C = 40 \mu\text{F}$

R_3

$J = 10 \text{ A}$

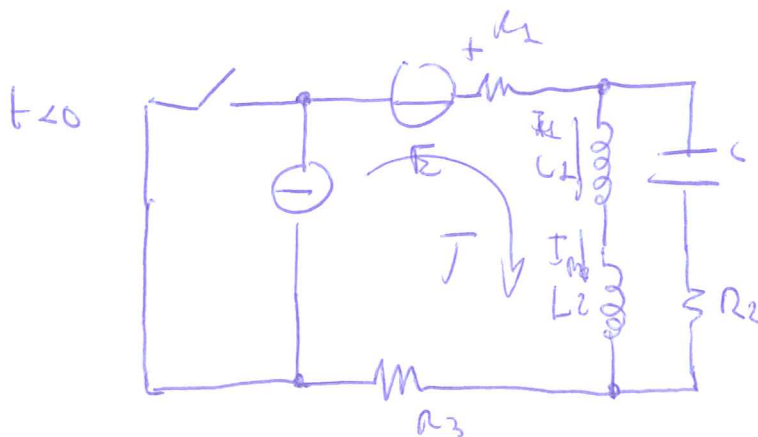
$R_3 = 30 \Omega$

 $t < 0$ T chiuso

$E = 400 \text{ V}$

$R_1 = 20 \Omega$

$R_2 = 50 \Omega$



LKT $-E + R_1 I + R_3 I = 0$

$I = \frac{E}{R_1 + R_3}$

$t < 0 \quad i_{L1}(t) = i_{L2}(t)$

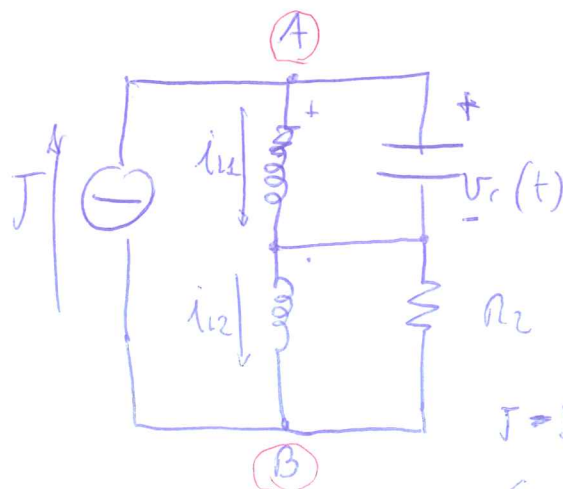
$I = \frac{E}{R_1 + R_3} = 8 \text{ A}$

$v_C(t_{0-}) = 0$

$i_{L1}(0^-) = 8 \text{ A}$

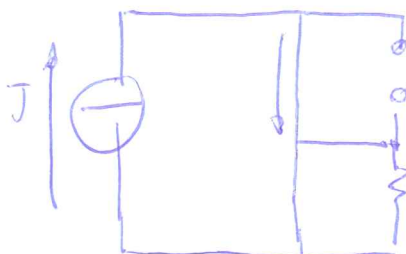
$i_{L2}(0^-) = 8 \text{ A}$

$v_C(0^+) = 0 \text{ V} = v_C(0^-)$



$i_{L2}(t) > t > 0$
LKC

$J = L_1 \frac{di_{L1}}{dt} + i_C(t) = 0$



$i_{L1}(t) + C L_2 \frac{di_{L2}}{dt} = J$

$$i_c = C \frac{dv_c}{dt} \quad C \frac{dv_{L1}}{dt} = C \frac{d}{dt} L_1 \frac{di_{L1}}{dt} \pm C L_1 \frac{d^2 i_{L1}}{dt^2}$$

$$i_{L_{part}}(t) = J \quad i_{L_{om}}(t) = A \cos \omega_0 t + B \sin \omega_0 t$$

$$C L_1 \frac{d^2 i_{L1}}{dt^2} + i_{L1}(t) = 0 \quad \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{C L_1}} = 500 \text{ rad/sec}$$

$$C L_1 s^2 + 1 = 0 \quad i_{L1}(t) = i_{L_{part}}(t) + i_{L_{om}}(t) =$$

$$s \sqrt{\quad}$$

$$i_{L1}(t) = J + A \cos \omega_0 t + B \sin \omega_0 t \quad \text{con } i_{L1} \text{ in } 0^+ = 8A$$

$\uparrow$
è l'integrale particolare

$$i_{L1}(0^+) = J + A \cos \omega_0 0 + B \sin \omega_0 0 \quad \text{da cui si ricava la costante } A$$

$\underbrace{\quad}_{\text{vale zero}} \quad \text{cos } 0 = 1$

quindi A vale $8 - J$

$$A = 8 - J = -2A$$

cerchiamo la costante B da $v_c(0^-) = 0V = v_c(0^+)$
per continuità della v_c da non ci sono impulsi

$$v_{L1}(0^+) = v_c(0^+) = 0$$

$$v_c = L_1 \frac{di_{L1}(t)}{dt} = L_1 (A \omega_0 \sin \omega_0 t + B \omega_0 \cos \omega_0 t) = B \omega_0 = 0$$

quindi

$$v_L(0^+) \Rightarrow L_2 (A \omega_0 \sin \omega_0 t + B \omega_0 \cos \omega_0 t) - L_2 B \omega_0^2$$

$$i_L(t) = J A \cos \omega_0 t : 10 - 2 \cos \omega_0 t$$

Applicazione LK T al nodo B e si ha:

inoltre, per il parallelismo di L_2 e R_2

$$J - i_{L_2}(t) - i_{R_2}(t) = 0$$

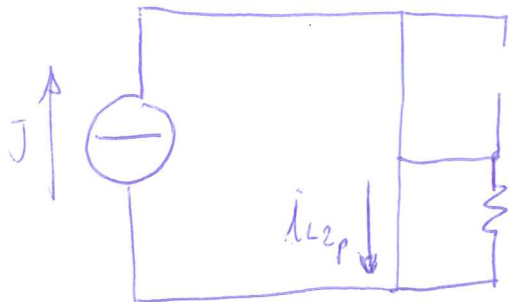
$$v_{L_2} = v_{R_2}$$

$$i_{R_2} = \frac{v_{R_2}}{R_2} = \frac{v_{L_2}}{R_2}$$

$$J = i_{L_2}(t) + \frac{v_{L_2}}{R_2}(t)$$

Sapendo che v_{L_2} è la derivata della corrente, si trova una equazione in i_{L_2} che ha un integrale particolare e un integrale della omogenea associata

INTEGRALE PARTICOLARE



$$i_{L_2p} = J \text{ pari e applicato al nodo}$$

INTEGRALE DELL'OMOGENA ovvero la parte a destra dell'uguale

$$i_{L_2}(t) + \frac{L_2}{R_2} \frac{di_{L_2}}{dt} \text{ scritta in } s \quad 1 + \frac{L_2}{R_2} s = 0$$

che cui radici s e T

$$s = -\frac{R_2}{L_2}$$

$$T_{L_2} = \frac{L_2}{R_2} = 0,4 \text{ ms}$$

$$i_{L_2 om}(t) = A e^{-\frac{t}{T_{L_2}}}$$

particolare omogenea

$$i_{L_2}(t) = i_{L_2p}(t) + i_{L_2o}(t) = J + A e^{-\frac{t}{T}}$$

$$i_{L2}(0^+) = J + A e^{-\frac{0}{\tau_{L2}}} = J + A$$

$$\text{con } A = \dot{i}_{L2}(0^+) - J = 8 - 10 = -2A$$

quindi

$$i_{L2}(t) = 10 - 2e^{-\frac{t}{\tau_{L2}}} = 10 - 2e^{-\frac{t}{0.4ms}} \quad t > 0$$

$$v_{L2} = v_L(t) = L_2 \frac{di_{L2}(t)}{dt} = L_2 (-2 \omega \sin \omega t) = 100 \sin \omega t$$

torriamo alla rete iniziale in Topologia, in cui usiamo le Lkt che mi dà la $V_f(t)$

$$-V_J(t) - \overset{\text{costante}}{E} + R_2 \underset{\substack{\uparrow \\ \text{nota}}}{L_{R2}} + \underset{\substack{\downarrow \\ \text{nota}}}{v_{L1}(t)} + \underset{\substack{\downarrow \\ \text{nota}}}{v_{L2}(t)} + R_3 \underset{\substack{\uparrow \\ J \text{ perché è il} \\ \text{valore imposto} \\ \text{dal network}}}{i_{L3}} = 0$$

ma solo $v_J(t)$ quindi lo posso trovare.

$$v_J(t) = -\underset{\substack{\uparrow \\ 400V}}{E} + \overset{500\Omega}{(R_1 + R_2)} J + 100 \sin \omega t + 100 e^{-\frac{t}{\tau_{L2}}}$$

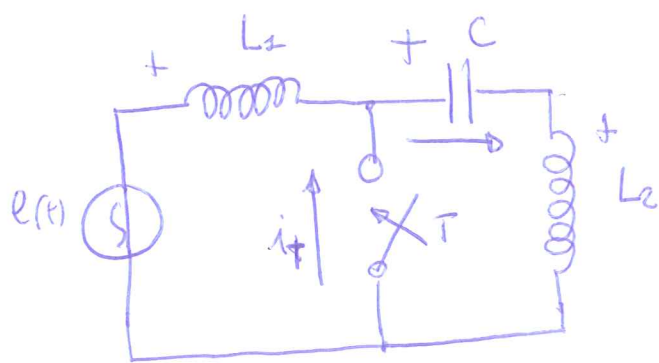
partiamo da v_{L2} e ne facciamo la derivata.

$$v_{L2} = L_2 \left(2 \left(\frac{1}{\tau_{L2}} \right) \right) e^{-\frac{t}{\tau_{L2}}} = 100 e^{-\frac{t}{\tau_{L2}}}$$

quindi

$$v_J(t) = -400 + 500 + 100 \sin \omega t + 100 e^{-\frac{t}{\tau_{L2}}}$$

ESERCIZIO
Aperiodico in regime sinusoidale



$$L_1 = 20 \text{ mH}$$

$$L_2 = 80 \text{ mH}$$

$$C = 50 \mu\text{F}$$

$$E = 100\sqrt{2} \text{ V}$$

$$e(t) = E_m \sin\left(\omega t + \frac{3}{4}\pi\right)$$

trovare $i_T(t)$
 $t < 0$

$t < 0$ T aperto

$t > 0$ T chiuso

Analisi in $t < 0$ con T aperto, la rete è una sola maglia alimentata in sinusoidale quindi la analizziamo in maniera fasoriale.

$$\bar{E} = \frac{E_m}{\sqrt{2}} e^{j\frac{3}{4}\pi} = 100 e^{j\frac{3}{4}\pi}$$

$$\text{LKT} \quad \bar{E} + \dot{Z}_{L1} \bar{I}_R + \dot{Z}_C \bar{I}_R + \dot{Z}_{L2} \bar{I}_R = 0$$

$$\bar{I}_R = \frac{5}{4} e^{j\frac{\pi}{4}}$$

$$\dot{Z}_{L1} = 20j$$

$$\dot{Z}_{L2} = 80j$$

$$\dot{Z}_C = -20j$$

quindi L_1 e C sono in risonanza $\dot{Z}_C = -\dot{Z}_{L1}$

$$\bar{I}_R = \frac{\bar{E}}{\dot{Z}_{L1} + \dot{Z}_{L2} + \dot{Z}_C}$$

$$i_R(t) = \frac{5}{4} \sqrt{2} \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{4}\right)$$

$$t=0 \quad i_{L1}(0^-) = \frac{5}{4} \sqrt{2} = \frac{5}{4} = 1,25 \text{ A}$$

$$v_C(0^-) =$$

$$i_C(0^-) = 125 \text{ A}$$

$$V_C(0^-) = \bar{I}_R \dot{Z}_C = 25 e^{-j\frac{\pi}{4}}$$

Tensione sul condensatore all'istante iniziale

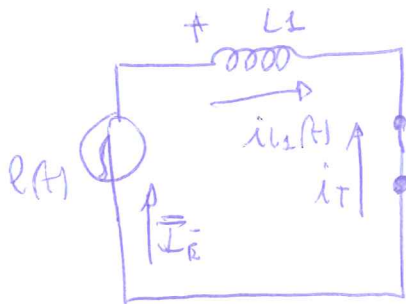
$$v_c(t) = 20\sqrt{2} \sin\left(\omega t - \frac{\pi}{4}\right)$$

$$\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$v_c(0^-) = -25\sqrt{2} = -v_c(0^+)$$

$$i_T(t) \quad t > 0 \quad i_T(t) = i_{L2}(t) - i_{L1}(t) = i_c(t) - i_{L1}(t)$$

realizziamo la parte sinistra della rete



$$i_{L1}(t) \quad t > 0$$

$$-e(t) + v_{L1}(t) = 0$$

$$-e(t) + L1 \frac{di_{L1}}{dt} = 0$$

L'equazione differenziale si può anche scrivere come:

$$L1 \frac{di_{L1}}{dt} = e(t)$$

L'omogenea $\bar{e}$:

$$L1 \frac{di_{L1}}{dt} = 0 \quad L1 s = 0 \quad \text{che ha radice } \emptyset \quad s = 0$$

quindi
genera la
costante 1

$$i_{L1,0} = A_{L1}$$

omogenea

Poi si cerca l'integrale particolare.

Va calcolata la corrente di circolo in quella maglia, in maniera particolare.

$$\bar{I}_{L1} = \frac{\bar{E}}{\bar{Z}_{L1}} = 5 e^{j\frac{\pi}{4}}$$

$$i_{L1 \text{ particolare}} \quad i_{L1}(t) = 5\sqrt{2} \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{4}\right) = i_{L1} p_{\text{part.}}(t)$$

$$i_{L1}(t) = i_{L1p} + i_{L10} = A_{L1} + 5\sqrt{2} \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{4}\right)$$

$$i_{L1}(0^+) = 1,25 = A + 5\sqrt{2} \sin\left(\omega 0 + \frac{\pi}{4}\right) = A + \frac{5\sqrt{2}}{\sqrt{2}} \Rightarrow \boxed{A_{L1} = -3,75 A}$$

$$i_{L1}(t) \quad t > 0$$

$$i_{L1} = -3,75 + 5\sqrt{2} \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{4}\right) + \underbrace{i_c(t)}_{\text{indica verso questo termine.}}$$

$$i_c(t) \quad t > 0 \rightarrow (v_c(t) + v_L(t)) = 0$$

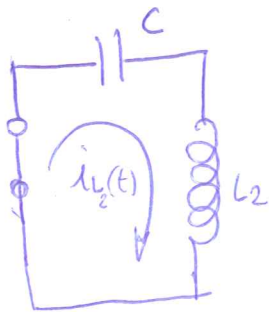
$$v_c + L \frac{di_L}{dt} = 0$$

$$i_{L2} = i_c \quad \text{perché sono in serie}$$

$$i_{L2} = i_c = C \frac{dv_c}{dt}$$

$$v_c + L \frac{d}{dt} \left(C \frac{dv_c}{dt} \right) = 0$$

$$v_c + L C \frac{d^2 v(t)}{dt^2} = 0$$



$$i + L C s^2 = 0$$

$$\boxed{S \pm j \sqrt{\frac{1}{L C}}}$$

$$v_c(t) = A \cos \omega_0 t + B \sin \omega_0 t$$

con le condizioni iniziali troviamo le costanti di integrazione
A direttamente B attraverso la corrente.

$$v(0^+) = A \cos \omega_0 0 + B \sin \omega_0 0 = -25$$

$$i_c = C \frac{dv_c}{dt} = A \omega_0 \sin \omega_0 t + B \cos \omega_0 t$$

$$\lambda + L_2 C s^2 \rightarrow S = \pm \sqrt{\frac{1}{L_2 C}}$$

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{L_2 C}} = \frac{500 \text{ rad}}{\text{sec}}$$

cerando i due elementi in serie si ha

$$1,25 = i_c(0^+) = -A \cancel{u_0} \sin(2 \omega_0 0) + B \omega_0 \cos \omega_0 0$$

$$v_c(t) = 25 \cos \omega_0 t + 50 \sin \omega_0 t$$

$$i_c(t) = \frac{C \phi v_c}{dt} = 0,625 \sin \omega_0 t + 1,65 \cos \omega_0 t$$

quindi

$$i_T(t) = 0,625 \sin \omega_0 t + 1,23 \cos \omega_0 t + 3,75 \underbrace{-5\sqrt{2}}_{\sin \omega_0 t + \frac{\pi}{4}} \quad t > 0$$

Termine
forzante

Giovedì 24 MAGGIO 2012 Lez no 38

Venerdì lezione aula C e poi aula M2 per 4 ore dalle 8:00 - 12:00

Mercoledì non si fa lezione

Giovedì e Venerdì prof Sieni eserciti

Il primo giorno la Sieni fa una prova d'esame svolta. Saranno 5 esercizi su 2,5 ore

I Richiami di Analisi Vettoriale svolta la precedente lezione non arrivati

fino a Rotore Gradiente divergenza e hanno introdotto i teoremi della

divergenza di Gauss e del Rotore di Stokes.

Adesso vediamo le applicazioni alle cariche elettriche. A pagina 1 c'è

l'esposizione di Gauss di ρ_c , σ_c , λ_c

$e = 1,6 \cdot 10^{-19}$ e carica elementare, ovvero carica dell'elettrone.

$$\rho_c(P, t) = \lim_{\Delta \tau \rightarrow 0} \frac{\Delta q}{\Delta \tau} \left[\frac{C}{m^3} \right]$$

Sono le densità di

$$\sigma_c(P, t) = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\Delta q}{\Delta S} \left[\frac{C}{m^2} \right]$$

carica libera

$$\lambda_c(P, t) = \lim_{\Delta l \rightarrow 0} \frac{\Delta q}{\Delta l} \left[\frac{C}{m} \right]$$

Vediamo le densità di carica legate.

Ci sono due tipi di densità di carica legate che danno luogo a fenomeni di campo diversi rispetto alla carica libera.

Sui fenomeni dielettrici si parla di cariche legate.

Sulle cariche libere si definisce il vettore densità di carica $\vec{J}$

$$\vec{J} = \rho_c^+ \vec{v}_g + \rho_c^- \vec{v}_g \left[\frac{A}{m^2} \right]$$

$$\rho_c = \rho_c^+ + \rho_c^-$$

densità di
carica netta
nel volume

Il vettore ha dimensione Ampere su metro quadrato

Le correnti di convezione si generano quando muovo il supporto in cui sono rinchiusi.

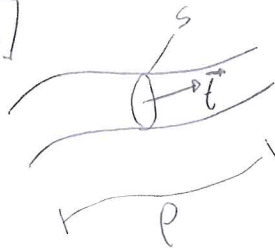


Per calcolare la densità di corrente associata a questo sistema dovrà fare

$$i(t) = \int_S \vec{J} \cdot \vec{n} \, dS \quad \text{è il flusso del vettore densità di corrente attraverso la superficie}$$

Se prendo un conduttore filiforme alla densità di corrente $\vec{J}$ è calcolabile con

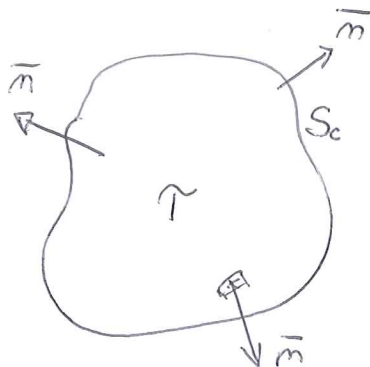
$$\vec{J} = \frac{i}{S} \vec{t} \quad \left[\frac{A}{m^2} \right]$$



Il riscaldamento del cavo dipende dalla densità di corrente locale e non dalla corrente. negli impianti restano sui $6 \frac{A}{mm^2}$ nelle macchine elettriche possiamo arrivare fino a $10 \left[\frac{A}{mm^2} \right]$

Le sorgenti di campo sono due $\rightarrow$ campo elettrico + campo magnetico
Esprimo dalla legge di continuità.

S_c = superficie chiusa.



$$\Delta q_{un} = - \Delta q_{int}$$

Il bilancio della carica che esce è pari ed opposto alla variazione di carica interna al volume, quindi se

sono uscite 3 coulomb allora dentro c'è una variazione di -3 coulomb

uscite rispetto la membrana

$$i_{un} = \frac{dq_{un}}{dt} = \frac{dq_{int}}{dt}$$

non è un vettore ma una scalare

$$i_{un}(t) = \oint_{S_c} \vec{J} \cdot \vec{n}_{un} \, dS$$

$$\oint \vec{J} \cdot \vec{n} \, dS = - \frac{dq_{int}}{dt}$$

Legge di continuità in termini integrali

Applico il teorema di Gauss della divergenza

$$\oint \vec{J} \cdot \vec{n} \, dS = \int_V \operatorname{div} \vec{J} \, d\tau$$

sostituendo in $q_{int} = \int_V \rho_c \, d\tau$

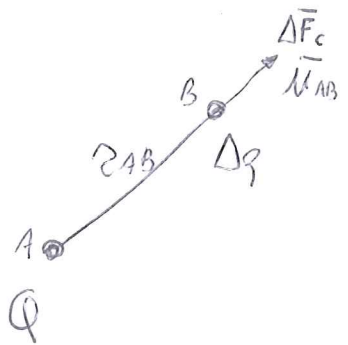
$$\int_V \operatorname{div} \vec{J} \, d\tau = - \frac{dq_{int}}{dt} = - \frac{d}{dt} \int_V \rho_c \, d\tau = - \int_V \frac{\partial \rho_c}{\partial t} \, d\tau$$

I pozzi e le sorgenti del vettore densità di corrente $\vec{J}$ stanno dove ha variazioni di densità di carica quindi per il teorema di continuità il vettore densità di corrente $\vec{J}$ è un vettore SOLENOIDALE ^{o il campo}

$$\operatorname{div} \vec{J} = - \frac{\partial \rho_c}{\partial t}$$

mette in relazione la sorgente del campo elettrico statico $\vec{J}$ con la sorgente di campo magnetico $-\frac{\partial \rho_c}{\partial t}$

Applichiamo i concetti del campo coulombiano. Presso il punto sorgente Q e il punto "campo" in cui si posizione la carica di sonda o di prova Δq si ha l'azione delle forze di coulomb delle forze elettrostatiche $\Delta \vec{F}_c$

$$\Delta \vec{F}_c = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q\Delta q}{r_{AP}^2} \vec{u}_{AP} \quad [N]$$


È diretta in modo radiale ed è attrattiva in carica eterogenea repulsiva in carica omogenea.

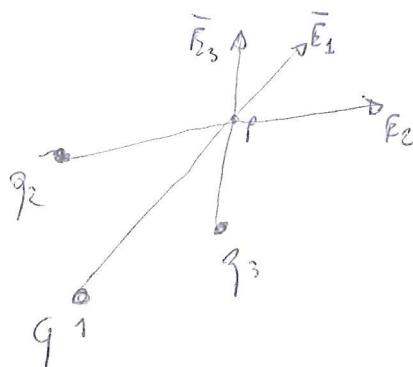
$$\vec{E}_c = \lim_{\Delta q \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{F}_c}{\Delta q} \quad \left[\frac{N}{C} \right]_{\text{opp.}} \left[\frac{V}{m} \right]$$

Forza elettrica specifica coulombiana è il campo elettrostatico ed è una proprietà puntuale dello spazio.

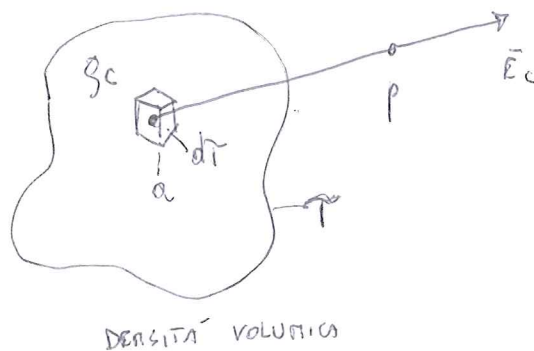
$$\vec{E}_c(P) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r_{qp}^2} \vec{u}_{AP}$$

se la carica è positiva il verso è quello del vettore oppure inverso se la carica q_p è negativa

Se il mezzo è lineare il valore del campo non dipende dalla distribuzione discreta, nel senso che si possono sovrapporre gli effetti delle cariche distribuite sommando i vettori dei singoli campi prodotti.

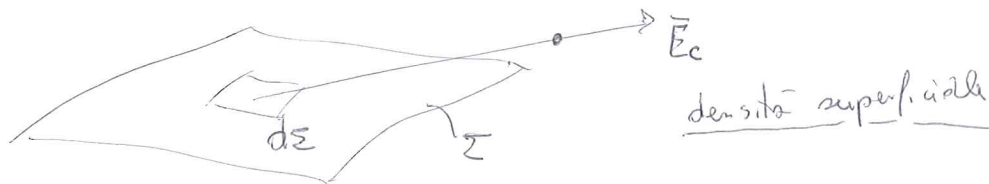


$$\vec{E}_c(P) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho_c(q)}{R^2_{AP}} \vec{u}_{AP} d\tau$$



Per una distribuzione
omogenea di carica vale
l'integrazione degli
effetti

Vale anche per distribuzioni
superficiali e lineari



Il campo coulombiano è conservativo quindi il lavoro per
spostare una carica da A a B è uguale su tutti i percorsi
e quindi la circolazione è nulla, quindi la tensione diventa
la d.d.p.

Se $\vec{E}_c$ è conservativo allora è dunque IRROTAZIONALE

RIASSUMENDO

$\vec{E}_c$ conservativo

$$\oint_{lc} \vec{E}_c \cdot \vec{t} dl = 0 \quad \forall lc$$

$\vec{E}_c$ è irrotazionale

$$\text{rot} \vec{E}_c = 0$$

$$\vec{E}_c = -\text{grad } V$$

$$\int_A^B \vec{E}_c \cdot \vec{t} dl = \int_A^B -\text{grad } V \cdot \vec{t} dl = V(A) - V(B)$$

Solo se il campo è
coulombiano ovvero
conservativo.

Anche il potenziale elettrico è scalare e definisce un campo scalare.

Il potenziale in un punto P di una carica puntiforme è dato da:

$$V(P) = \frac{q}{4\pi\epsilon} \frac{1}{r_{AP}}$$

Il potenziale è definito a meno di una costante ma negli integrali precedenti $+const - const = v_a - v_b$

La costante può essere scelta all'infinito

$$V(P) = \frac{1}{4\pi\epsilon} \int_V \frac{\rho_c(Q)}{r_{QP}} d\tau$$

Il campo elettrostatico è una delle componenti del campo elettrico, ce ne sono altre.

Il campo elettrico è una forza per unità di carica che agisce in una carica per quanto tale (significa direttamente sulla carica non sul supporto che la contiene, ad es. la palla d'ombra)

Se non c'è una forza che agisce sulla carica non c'è campo.

In condizioni normali, ovvero non stazionarie, il campo totale è somma della componente coulombiana ma anche della componente indotta. In generale vale:

$$\vec{E}(P,t) = \lim_{\Delta q \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{F}_e}{\Delta q}$$

ci sono sempre le due componenti

$$\vec{E} = \vec{E}_c + \underbrace{\vec{E}_i}_{\text{componente indotta.}}$$

$\vec{E}_i$ è legata alle movimenti delle cariche, e alla variazione dell'induzione magnetica nel tempo o variazioni di $\vec{J}$

$\vec{E} = \vec{E}_c + \vec{E}_i$ non è conservativo per la componente $\vec{E}_i$

$\vec{E}$ è conservativo solo in condizioni di elettrostatica o di regime stazionario. In queste due condizioni $\vec{E} = \vec{E}_c + \vec{0} = \vec{E}_c$

Si possono definire i concetti di tensione e corrente in termini puntuali o differenziali.

Adesso mettiamo assieme i concetti integrali e differenziali

Validiamo il campo di corrente.

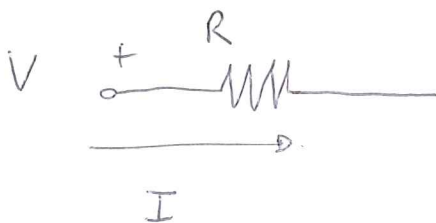
ci sono 3 fenomeni

- campo di corrente, ovvero effetti che il campo elettrico produce dentro a un materiale conduttore
- campo elettrico all'interno di un materiale isolante, ovvero fenomeni dielettrici
- campi all'interno di materiali magnetici con permeabilità diversa

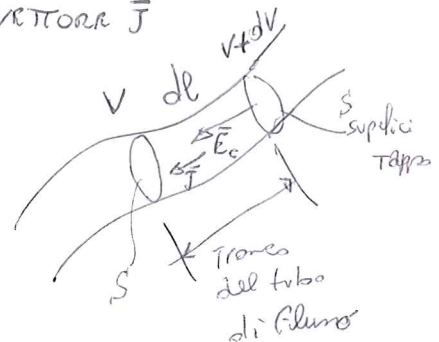
(in condizioni elettrostatiche)

Validiamo il campo di corrente:

TUBO DI FLUSSO DEL VETTORE $\vec{J}$



$$V = RI$$



Il campo $\vec{E}$ va dal potenziale maggiore al minore, come in tutti i fenomeni fisici. Se nel tubo di flusso ci sono cariche libere si sperimenta la presenza del vettore densità di corrente $\vec{J}$



per due similitudine la forma è sempre cilindrica e quindi vale

temperatura proporzionale al valore di $\vec{J}$ $\vec{E}_c \cdot d\vec{l} = \oint_S \frac{d\vec{l}}{S} \cdot \vec{J} S$

$$\vec{E}_c = \rho \vec{J}$$

in un materiale isotropo

isotropo signi: più che se applico il campo in una direzione ottengo una corrente nello stesso verso e di intensità costante in tutti i punti.

Il mezzo è lineare e isotropo in questo esempio.

Inoltre il materiale può essere uniforme o non uniforme.

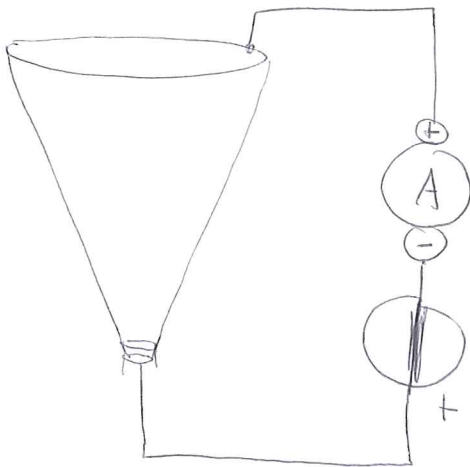
$$\vec{E}_c = \rho \vec{J}$$

↑
vettori

validano la potenza dissipata nel tratto di tubo di flusso $P = RI^2$

$$dP = \rho \frac{d\ell}{s} (JS)^2 = \rho J^2 \cdot \frac{S d\ell}{dJ}$$

Puntualmente si ha una dissipazione di potenza $W = \rho J^2 \left[\frac{W}{m^3} \right]$



La densità di corrente J non è costante nel tubo di flusso e quindi neanche la potenza dissipata puntualmente. La sezione minore scalda di più. Quello che succede all'interno dei circuiti integrati

Per non bruciare particolari resistori "integrati" in microcircuiti, va fatto cioè l'approccio integrale di quello differenziale che lo analizza in modo puntuale.

CAMPO DI CORRENTE, nel materiale uniforme, isotropo

$$E_c = \rho J$$

$$W = \rho J^2$$

La legge di Ohm generalizzata ovvero alla grandezza specifica vale anche quando il campo è completo ovvero ha le

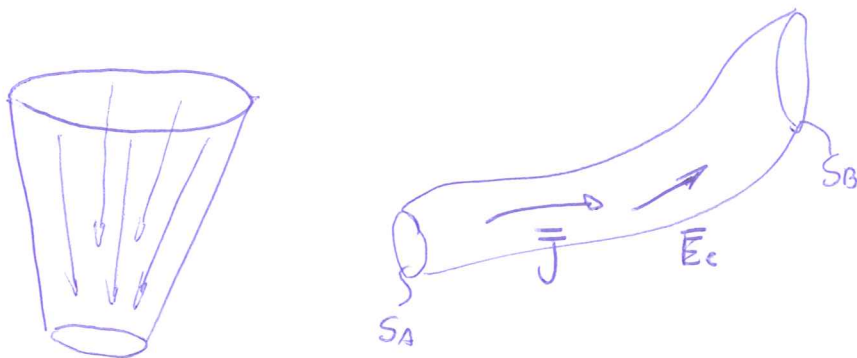
componente indotta alla le elettromagnetica.

Spero conviene lavorare in i due approcci integrale e campistico

integrale = circuitale.

Per conoscere le temperature interne puntuali si vuole l'approccio campistico

Posso calcolare la resistenza del tronco di tubo di flusso.



Per i tubi di flusso calcoliamo la portata e quindi la corrente

$$I = \int_{S_A} \vec{J} \cdot \vec{n} ds = \int_{S_B} \vec{J} \cdot \vec{n} ds$$

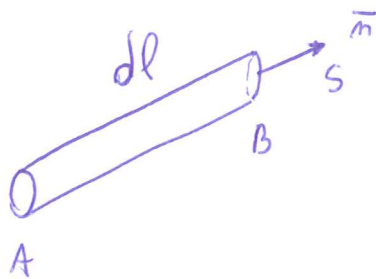
Poi si valuta la tensione AB che si valuta integrando lungo una qualsiasi linea l_{AB} dato che siamo in reg. stazionaria

$$V_{AB} = \int_{A \ell}^B \vec{E} \cdot \vec{t} dl$$

Il rapporto tra la tensione valutata tra le sup. troppo e la portata del tronco di tubo di flusso è una proprietà geometrica del tubo di flusso ed è omogenea ad una resistenza generalizzata dipendente dal materiale dello stesso.

$$R_{eq} = \frac{\int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{l}}{\int_{S_A} \vec{J} \cdot \vec{n} \, ds}$$

Vediamo il tronco di tubo di flusso cilindrico



$$V_{AB} = E \cdot dl$$

$$I = J \cdot S = \frac{E}{\rho} \cdot S$$

$$R_{eq} = \frac{E \cdot dl}{\frac{E}{\rho} S} = \rho \frac{dl}{S}$$

La resistività ρ del RAME è quasi "2" $\mu\Omega \cdot cm$ a $20^\circ C$

alluminio 3 $\mu\Omega \cdot cm$ a $20^\circ C$

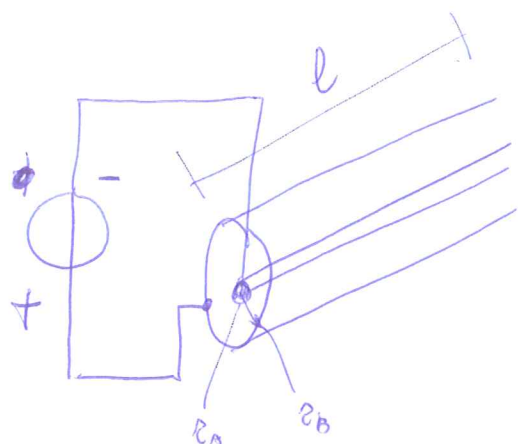
acciaio 20 $\mu\Omega \cdot cm$ a $20^\circ C$

ottone 40 $\mu\Omega \cdot cm$ a $20^\circ C$

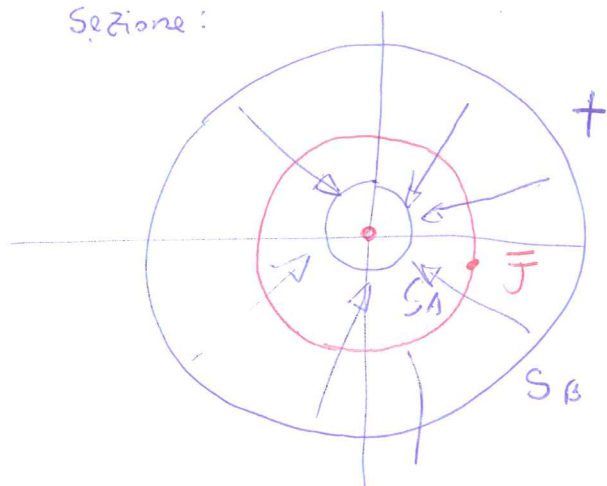
acciaio 1300 120 $\mu\Omega \cdot cm$ a $1300^\circ C$

inox 70 $\mu\Omega \cdot cm$ a $20^\circ C$

calcolare la resistenza di un tubo di plomo cilindrico



Sezione:



Il campo è
ortogonale alle
linee equipotenziali
e dato che $\vec{J}$ è parallela
al campo sarà ortogonale
anche esso alle linee equipot.

$$I = J 2\pi r l$$

$$J = \frac{I}{2\pi r l}$$

$$E = \oint J = \frac{\oint I}{2\pi r l}$$

$$\int_A^B \vec{E} \cdot \vec{t} dl = \int_{r_A}^{r_B} E dr$$

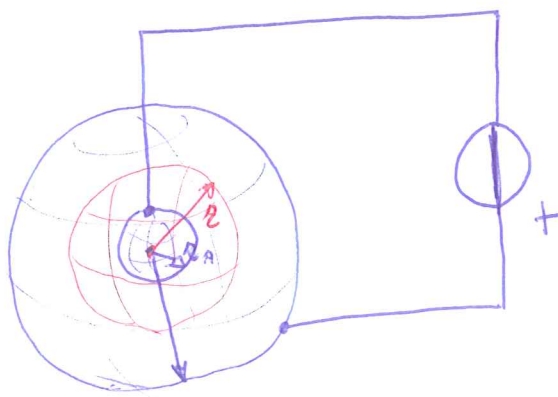
$$= \int_{r_A}^{r_B} \frac{\oint I}{2\pi r l} dr = \frac{\oint I}{2\pi l} \ln \frac{r_B}{r_A}$$

tensione AB

quindi

$$R_{eq} = \frac{V_{AB}}{I} = \frac{\oint}{2\pi l} \ln \frac{r_B}{r_A}$$

dipende da
1) materiale
2) geometria



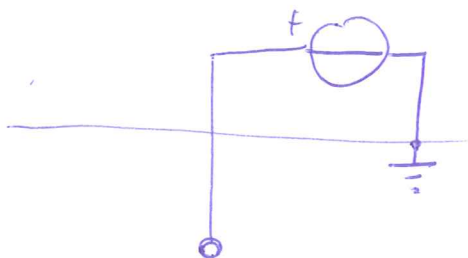
$$I = \int_S \vec{J} \cdot \vec{m} \, ds = J 4\pi r^2$$

$$\vec{J} = \frac{I}{4\pi r^2} \quad \vec{E} = \frac{\rho I}{4\pi r^2}$$

calcoliamo prima la tensione AB tra i due elettrodi sferici

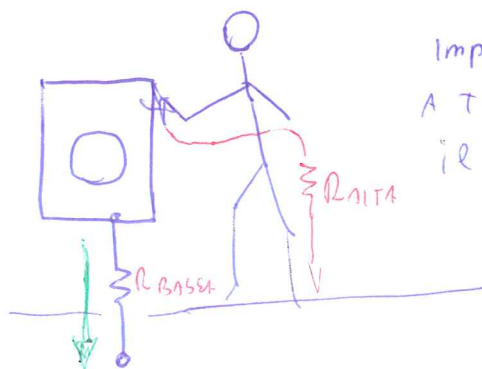
$$V_{AB} = \int_{r_A}^{r_B} E \, dr = \int \frac{\rho I}{4\pi r^2} \, dr = \frac{\rho I}{4\pi} \left[\frac{1}{r_A} - \frac{1}{r_B} \right]$$

Se facciamo tendere r_B all'infinito abbiamo il modello della messa a terra, il pannello di messa a terra.



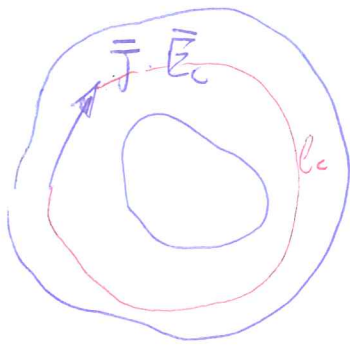
$$R_{eq} = \frac{V_{AB}}{I}$$

$$= \frac{\rho}{4\pi} \left[\frac{1}{r_A} - \frac{1}{r_B} \right]$$



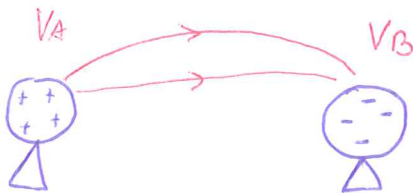
Impianto di scarica
A Terra. La R deve essere molto bassa verso il dispersore per proteggere la persona.

negli esempi precedenti il campo dentro al tubo di flusso era elettrostatico.
Ma bisogna considerare i fenomeni dissipativi e quindi non è mai
completamente stazionario.



questo campo conservativo non è in grado di fare lavoro.

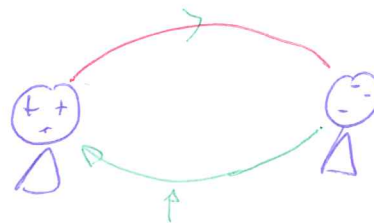
Ci vogliono altre forze elettriche specifiche che possano muovere le cariche da un potenziale più basso a uno più alto.



Se metto in conduttione le due sfere allora si portano all'equilibrio del potenziale.

Per creare una circolazione devo 1) chiudere il circuito

2) riportare le cariche al potenziale di partenza ovvero dei "generatori"



AZIONE ESTERNA
CHE MANTIENE LO SQUILIBRIO
DEL POTENZIALE, OVVERO
UNA FORZA ELETTRICA SPECIFICA

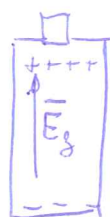
$F_{E.S.}$ generatrice

Servono " $F_{E.S.}$ " non conservative che ovviamente arrivano da altre forme di energia rispetto al sistema.

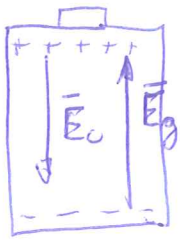
Se non ci fossero non è possibile fare girare la corrente nel circuito. Vediamo un generatore a vuoto.



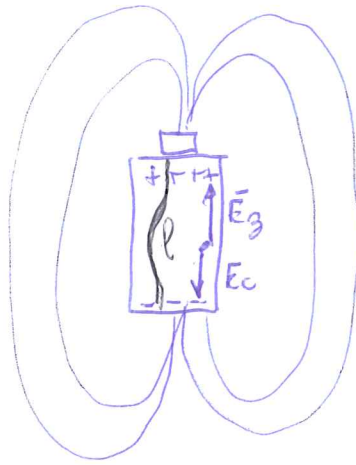
a vuoto misuriamo una ddp generata dalle forze elettriche specifiche che 1) separa le cariche



separando le cariche si crea un campo coulombiano il contrario, fino a che c'è equilibrio (A vuoto)



i campi $\vec{E}_c$ e $\vec{E}_g$ si portano all'equilibrio
 A vuoto in condizioni statiche, ma anche
 esternamente c'è un'estensione dei campi



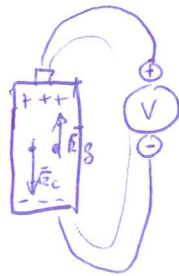
$$\vec{E}_c - \vec{E}_g$$

$$\mathcal{E}_{AB}(t) \triangleq \int_A^B \vec{E}_g \cdot \vec{t} \, dl$$

definizione
 della f.e.m.

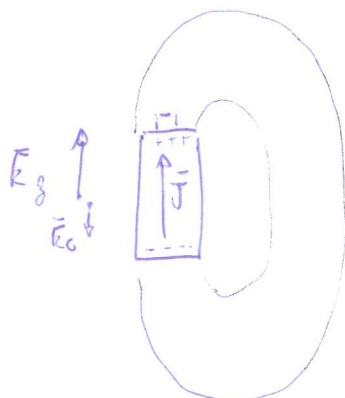
$\mathcal{E}_{AB}$ = forza elettromotrice e vale:

$$\mathcal{E}_{AB} = \int_B^A \vec{E}_g \cdot \vec{t} \, dl = \int_B^A -\vec{E}_c \cdot \vec{t} \, dl = \int_A^B \vec{E}_c \cdot \vec{t} \, dl = V_{AB}$$



Solo a vuoto la f.e.m. coincide
 con la V_{AB}

Quando siamo a carico il fenomeno è descritto da:



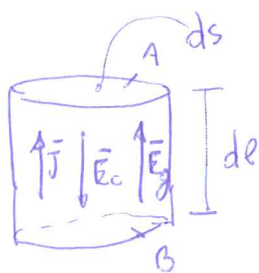
$\vec{E}_g$ ha lunghezza diversa da $\vec{E}_c$
 quindi circola una corrente $\vec{I}$

$$V_{AB} = \mathcal{E} \quad \text{A VUOTO}$$

$$V_{AB} = \mathcal{E} - RI \quad \text{A CARICO}$$

In termini di forze elettriche spieghiamo possiamo, preso un tubicino di Plumb (358)

interno al generatore, dobbiamo de:



$$dV_{AB} = -\bar{E}_c dl$$

$$dE = \bar{E}_g dl$$

$$I = J ds$$

$$-E_c dl = E_g dl - \cancel{S} \frac{dl}{\cancel{S}} J ds$$

semplificando ove possibile.

Rimane $\bar{E}_c + \bar{E}_g = SJ$

All'interno dei generatori le forze elettriche specifiche generatrici sono concentrate, quindi quella che ho scritto sopra vale dentro al generatore.

La nomenclatura "forza elettrica specifica" trae in inganno perché non è Forza ma tensione e l'unità di misura è Volt.

In definitiva, ci vuole un'energia fornita per trasformarla in tensione e non si ricava potenza e energia dal niente e non esistono i motori magnetici che fanno finta di esistere in internet.