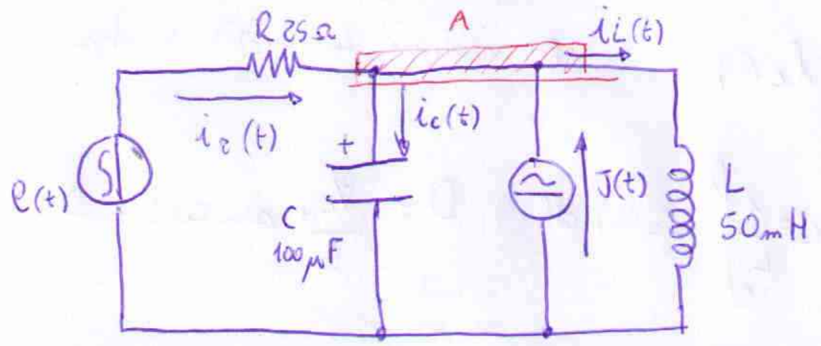
02/05/2012 Lez. 28 Prof. Sieni

ESERCIZIO NEL DOMINIO DEL TEMPO



$\omega = 1000 \frac{rad}{sec}$

$i_R(t) = 4 \cdot \cos \omega t$

$v_C(t) = 50 \cdot \cos \omega t$

Trovare $e(t)$ e $J(t)$ nel dominio del tempo

Sul resistore la ~~tensione~~ corrente ha espressione ... $i_R(t) = I_{RM} \cos(\omega t + \alpha_R)$

... e la tensione è ... $v_C(t) = V_{CM} (\cos \omega t + \alpha_C)$

La forme d'onda sui generatori sono date dalle espressioni temporali ....>
$$\begin{cases} e(t) = E_M \cos(\omega t + \alpha_E) \\ J(t) = J_M \cos(\omega t + \alpha_J) \end{cases}$$

La tensione al nodo A è uguale a quella applicata sia a $J(t)$ che a C che a L perché in parallelo

APPLICHIAMO KIRCHHOFF alle tensioni LKT

$$v_R(t) = R\, i_R(t) = 25 \cdot 4 \cos \omega t = 100 \cos \omega t$$

$$-e(t) + v_R(t) + v_C(t) = 0$$

quindi $e(t) = v_R(t) + v_C(t) = 100 \cos \omega t + 50 \cos \omega t = 150 \cos \omega t$

ne consegue che $e(t) = E_M \cos(\omega t + \alpha_E) = 150 \cos(\omega t + \emptyset)$

APPLICHIAMO KIRCHHOFF alle correnti.

$i_R(t) - i_C(t) - i_L(t) + J(t) = 0$ con versore entrante al piano di taglio

$$J(t) = i_C(t) + i_L(t) - i_R(t)$$

$$i_C(t) = C \frac{dV_C(t)}{dt} = C \frac{d(50 \cos \omega t)}{d} = -50 \omega C \operatorname{sen} \omega t$$

$$\stackrel{!}{=} +50 \omega C \cos(\omega t + \tfrac{\pi}{2})$$

$\omega C\, 50 = I_{CM} = 5$

quindi $5\cos\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right) = i_C(t)$

Per ricavare la corrente si integra

$$v_L = L\,\frac{di(t)}{dt} \qquad i_L(t) = \frac{1}{L}\int v_L(t)\,dt + D = \frac{V_{CM}}{L}\,\text{sen}\,\omega t + D$$

costante "dei valori iniziali"

Per il calcolo della costante di integrazione D, sappiamo che la corrente è sfasata di $\frac{\pi}{2}$ si ha

$$= \frac{V_{CM}}{\omega L}\left(\cos \omega t - \frac{\pi}{2}\right) + D$$

all'istante zero si impone che la sinusoide passi per l'origine

$D = 0$ con $\frac{V_{CM}}{\omega L} = I_{Lmax} = 10\cos\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right) = i_L(t)$

ricordando che $v_2(t) = 100\cos\omega t$, $i_C(t) = 5\cdot\cos\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right)$, $i_L(t) = 10\cos\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right)$

allora abbiamo $J(t) = i_C(t) + i_L(t) - i_2(t) = 5\cos\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right) + 10\cos\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right) - 4\cos\omega t$

$$J(t) = 50\cos\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right) + \cos\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right) - 4\cos(\omega t)$$

$$= -4\cos\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right) - 4\cos\omega t$$

$$= -4\,\text{sen}\,\omega t - 4\cos\omega t$$

$$\boxed{J(t) = -4\,\text{sen}\,\omega t - 4\cos\omega t}$$

Dato che $J(t) = J_M\cos(\omega t + \alpha_J) = J_M\cos\alpha_J\cdot\cos\omega t - J_M\sin\alpha_J\cdot\sin\omega t$

Dato che la parte $J_M \cos\alpha_J$ é un termine noto come anche $J_M \sin\alpha_J$

si ha:

$$\boxed{J(t) = K \cos\omega t - K_1 \sin\omega t}$$

rimangono però le incognite J_M e α_J che si ricavano da:

$$\boxed{\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1}$$ Rel. goniometrica fondamentale

$$\begin{cases} J_M \cos\alpha_J = -4 \\ -J_M \operatorname{sen}\alpha_J = -4 \end{cases} \qquad \begin{cases} \cos\alpha_J = -\dfrac{4}{J_M} \\ \sin\alpha_J = +\dfrac{4}{J_M} \end{cases}$$

usando la relazione goniometrica fondamentale

$$\left(\frac{4}{J_M}\right)^2 + \left(\frac{4}{J_M}\right)^2 = 1$$

si ricava $J_M = 4\sqrt{2}$

Ora cerchiamo la fase α_J.

da $$\begin{cases} \cos\alpha_J = -\dfrac{4}{J_M} = \dfrac{-4}{4\sqrt{2}} = -\dfrac{1}{\sqrt{2}} \\ \sin\alpha_J = \dfrac{4}{J_M} = \dfrac{4}{4\sqrt{2}} = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \end{cases} \qquad \begin{cases} \alpha_J = \operatorname{arctang}\left(-\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right) \\ \alpha_J = \operatorname{arctang}\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right) \end{cases}$$

hanno 2 soluzioni a testa

per la prima eq. teniamo buona $\alpha_J = \frac{3}{4}\pi$ e $-\frac{3}{4}\pi$

$\frac{3}{4}\pi$ perché è soluzione sia della prima equazione che della seconda

$\alpha_J = \frac{\pi}{4}$ e $\frac{3}{4}\pi$

$$J(t) = 4\sqrt{2}\cos\left(\omega t + \frac{3}{4}\pi\right)$$ che è la soluzione dell'esercizio

Continuiamo l'esercizio analizzando le potenze scambiate tra i componenti della rete.

Le potenze sono calcolabili nel dominio del tempo.

Quando si lavora con i valori massimi del del tempo di $i(t)$ e $v(t)$

La potenza attiva è $P \rightarrow$

$$\boxed{P = \frac{V_M I_M}{2} \cos\varphi = V_{eff} I_{eff} \cos\varphi}$$

e la potenza reattiva è:

$$\boxed{Q = \frac{V_M I_M}{2} \operatorname{sen}\varphi = V_{eff} I_{eff} \operatorname{sen}\varphi}$$

Per la potenza apparente si ha

$$\boxed{A = \frac{V_M I_M}{2} = V_{eff} I_{eff} = \sqrt{P^2 + Q^2}}$$

calcoliamo sul generatore $e(t)$ P, Q, A.

$e(t) = 150 \cos \omega t$

$i_2(t) = i_e(t)$ perché sono in serie.

Usando i valori massimi scriviamo per $e(t)$:

Lo sfasamento risulta nullo sul ram E con $\varphi = (\alpha_E - \alpha_R) = 0 - 0 = 0$

$$P_E = \frac{V_{E_M} I_{E_M}}{2} \cos\varphi = \frac{150 \cdot 4}{2} \cos 0 = 300 \text{ WATT.}$$

$$Q_E = \frac{V_{E_M} I_{E_M}}{2} \sin\varphi = 0 \text{ VAR.}$$

$$A = \frac{V_E I_E}{2} = \sqrt{P_E^2 + Q_E^2} = 300 \, [VA]$$

Riassumendo i risultati abbiamo

$P_E = 300\,W \quad Q_E = 0\ VAR \quad A = 300[VA]$

Vediamo la potenza sul generatore $J(t)$ ricordando che è soggetto a $V_c(t)$ in parallelo

$$P_{J(t)} = \frac{V_{LM} \cdot J_M}{2} \cos\varphi = \frac{50 \cdot 4\sqrt{2}}{2} \cdot \cos\varphi$$

$$\varphi = \underbrace{0}_{\text{fase di } E(t) \text{ sul condensatore}} - \underbrace{\frac{3}{4}\pi}_{\text{fase della corrente su } J} = -\frac{3}{4}\pi$$

$$= \frac{50 \cdot 4\sqrt{2}}{2}\left(-\frac{3}{4}\pi\right) = -100\,W$$

$$Q_J(t) = \frac{V_{LM} \cdot J_M}{2} \operatorname{sen}\varphi = -100\ VAR$$

$$A = \frac{50 \cdot 4\sqrt{2}}{2} \simeq 141\ VA$$

riassumiamo i risultati per J

$P_J = -100\,W \quad Q_J = -100\ VAR \quad A = 141\ VA$

Consideriamo il bipolo condensatore. Quanto vengono le P, Q, A ?

$$P_C = \frac{V_{CM}\, I_{CM}}{2} \cos\varphi = \frac{50 \cdot 5}{2} \cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) = 0\ WATT$$

come ci si doveva aspettare perché tutta la potenza su un condensatore è di tipo reattivo.

$$Q_C = \frac{V_{CM}\, J_{CM}}{2} \operatorname{sen}\varphi = -125\ VAR$$

$$A_c = +125\ VA$$

Riassumendo abbiamo

$P_C = 0[W] \quad Q_C = -125[VAR] \quad A_c = +125[VA]$

Con analoghi calcoli otteniamo la potenza sull'induttore.

$$P_L = 0 \qquad Q_L = \frac{V_{LM} I_{LM}}{2} \operatorname{sen} \varphi = \frac{50 \cdot 1}{2} \operatorname{sen} \frac{\pi}{2} = 25 \text{ VAR}$$

quindi A = pot. Apparente = 25 [VA]

Sulla resistenza abbiamo.

$$P_R = \frac{V_{RM} I_{RM}}{2} \cos \varphi = \frac{100 \cdot 4}{2} \cos \emptyset = 200 \text{ WATT}$$

$$Q_R = 0 \qquad A = 200 \text{ [VA]}$$

Abbiamo tutte le forme delle potenze in ogni bipolo.

Vediamo la somma delle potenze erogate "ATTIVE"

$$\sum P_{erogate} = P_e + P_J = 300 - 100 = 200$$

Vediamo la somma delle potenze assorbite

$$\sum P_{assorbite} = P_R + P_L + P_C = 200 + 0 + 0 = 200$$

Vediamo la somma della potenze reattive erogate e assorbit

$$\sum Q_{erogate} = -100 = \sum Q_{assorbite} = -100$$

NON VALE PER LE POTENZE APPARENTI per il teorema di Boucherot

infatti si ha $\quad \sum A_{generate} = 300 + 141 = 441$ VA

$\sum A_{assorbite} = 125 + 25 + 200 = 350$ VA

non sono uguali come ci si deve aspettare

L'uguaglianza vale solo per P e Q non per A.

La potenza complessa si stima sui fasori.

$$\boxed{\mathring{A} = \bar{V}\check{I} = P + JQ}$$

Facciamo i calcoli solo per il generatore "$\bar{J}$" ovvero da $J(t)$ ricaviamo il fasore

$$\boxed{\bar{J} = \frac{4\cancel{\sqrt{2}}}{\cancel{\sqrt{2}}} \cdot e^{J\frac{3}{4}\pi}} \qquad \boxed{\bar{V}_J = \frac{50}{\sqrt{2}} e^{J0}}$$

$$\mathring{A} = \bar{V}_J \cdot \check{J} = \frac{50}{\sqrt{2}} e^{J0} \cdot 4 e^{-J\frac{3}{4}\pi} = 100\sqrt{2}\, e^{-J\frac{3}{4}\pi}$$

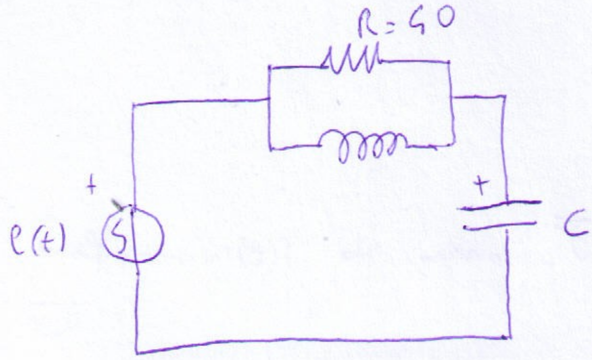
$$= 100\sqrt{2}\left(\cos\left(\tfrac{3}{4}\pi\right) + J \operatorname{sen}\left(\tfrac{3}{4}\pi\right)\right)$$

$$= \underbrace{100\sqrt{2}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)}_{P} - \underbrace{J\,100\sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)}_{Q}$$

ORA possiamo ripetere il calcolo per ogni altro bipolo.

Alla fine si ripete il bilancio come fatto nel dominio del tempo e si dovranno ottenere i medesimi risultati.

Esercizio ing. Sieni



calcolare le energie nell'istante $t_0 = \frac{\pi}{6\omega}$

$W_C(t_0) =$

$W_L(t_0) =$

$P_R(t)$:

$X_C = 20\sqrt{3}\ \Omega$

$e(t) = 400 \sin(\omega t)$

$X_L = \frac{40}{\sqrt{3}}\ \Omega$

I parametri chiesti li ricaviamo dalle grandezze legate come da schema qui sotto:

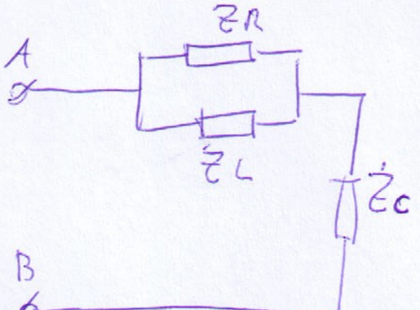
$W_C \rightarrow v_C(t)$

$W_L \rightarrow i_L(t)$

$P_R \rightarrow i_R(t)$

$\bar{E} = \frac{400}{\sqrt{2}} e^{j0}$

Calcoliamo l'impedenza equivalente della rete vista dai morsetti A-B



$$\boxed{\dot{Z}_{//} = \frac{\dot{Z}_R \cdot \dot{Z}_L}{\dot{Z}_R + \dot{Z}_L} = \frac{1}{R} + \frac{1}{jX_L} = (10 + j10\sqrt{3})}$$

$$\dot{Z}_{//} = 20\, e^{j\frac{\pi}{3}}$$

$$\dot{Z}_{TOT} = \dot{Z}_{//} + \dot{Z}_C = 10 + j10\sqrt{3} - jX_C$$

$$\stackrel{!}{=} 10 + j10\sqrt{3} - j20\sqrt{3}$$

$$\stackrel{!}{=} (10 - j10\sqrt{3})\ [\Omega] = 20\, e^{-j\frac{\pi}{3}}$$

con $-\frac{\pi}{3}$ ricavato da arctang $-\frac{10}{10}$ =

$$\overline{E} = \dot{Z}_{TOT} \cdot \overline{I}_E \qquad \text{con } \overline{I}_E = \frac{\overline{E}}{\dot{Z}_{TOT}} = \frac{400}{\sqrt{2}} e^{j0} \cdot \frac{1}{\left(20 e^{-j\frac{\pi}{3}}\right)}$$

quindi, eseguendi i calcoli, si ha:

$$\boxed{\overline{I}_E = \frac{20}{\sqrt{2}} e^{j\frac{\pi}{3}}}$$

~~trovato~~ la corrente sul condensatore $\overline{I}_c = \overline{I}_E$ perché sono in serie, troviamo anche la tensione $\overline{V}_c$ con la legge di Ohm

$$\overline{V}_c = \dot{Z}_c \cdot \overline{I}_E = -j 20\sqrt{2} \cdot \frac{20}{\sqrt{2}} e^{j\frac{\pi}{3}}$$

$$= e^{-j\frac{\pi}{2}} \cdot 20\sqrt{3} \, \frac{20}{\sqrt{2}} \cdot e^{j\frac{\pi}{3}}$$

$$= 400 \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} e^{-j\frac{\pi}{6}}$$

$$\boxed{\overline{V}_c = 400 \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} e^{-j\frac{\pi}{6}}}$$

Ora calcoliamo la corrente su resistenza e su induttanza.
La ricaviamo a partire dalla tensione sul "parallelo".

$$-\overline{E} + \overline{V}_{Zc} + \overline{V}_{Zp} = 0 \qquad \overline{V}_{Zp} = \frac{-200 + 200\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$$

$$\overline{I}_R = \frac{\overline{V}_{Zp}}{R} = \left(-\frac{5}{\sqrt{2}} + j\frac{5}{\sqrt{2}}\sqrt{3}\right) \qquad \text{ora con LKC Trovo } \overline{I}_L$$

$$\overline{I}_L = \overline{I}_E - \overline{I}_R = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(15 + j5\sqrt{3}\right)$$

$v_c(t) = 400\sqrt{3}\ \text{sen}\left(\omega t - \frac{\pi}{6}\right)$ $i_L(t) = 10\sqrt{3}\ \text{sen}\left(\omega t + \frac{\pi}{6}\right)$

$i_R(t) = 10\ \text{sen}\left(\omega t + \frac{2}{3}\pi\right)$

$W_C(t_0) = \frac{1}{2} C\, v_c^2(t_0)$ energia nel condensatore.

$$v_c(t)\Big|_{t_0} = 400\sqrt{3}\ \text{sen}\underbrace{\left(\frac{\pi}{6\omega}\cdot\omega - \frac{\pi}{6}\right)}_{0} = 0\ [J]$$

$$W_L(t_0) = \frac{1}{2} L\, i^2_{L(t_0)} \cong 6{,}5\ [J]$$

$$P_R(t_0) = R \cdot i_R^2(t_0) = 1000\ [W]$$

Fare il diagramma fasoriale.