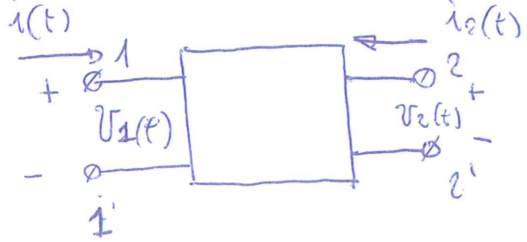
26/03/2012 DOPPI BIPOLI Lez. n. 13

I doppi bipoli di ordine zero sono schematizzati con il simbolo



Fra tutte le categorie che vengono trattate in elettrotecnica sono i più importanti.

Vediamo le caratteristiche di

- Doppi bipolo di ordine zero
- Doppio bipolo trasformatore
- Doppio bipoli controllato in tensione e in corrente.

Le equazioni caratteristiche del doppio bipolo lineare di ordine zero sono dei piani e non delle rette "doppio bipolo" ogni bipolo ha una retta.

equazioni implicite
$$\begin{cases} f_1(v_1, v_2, i_1, i_2) = 0 \\ f_2(v_1, v_2, i_1, i_2) = 0 \end{cases}$$

Le equazioni per essere di ordine zero devono essere prive di derivate e integrali

A seconda delle combinazioni delle grandezze indipendenti rispetto alle dipendenti, ricaviamo delle combinazioni che rappresentano il doppio bipolo

equazioni esplicite
$$\begin{cases} v_1 = f_{1c}(i_1, i_2) \\ v_2 = f_2(i_1, i_2) \end{cases}$$
doppio bipolo controllato in corrente

$$\begin{cases} i_1 = f_{1t}(v_1, v_2) \\ i_2 = f_{2t}(v_1, v_2) \end{cases}$$
doppio bipolo controllato in tensione

I CASI CHE VEDIAMO SARANNO

EQUAZIONI ALGEBRICHE A COEFFICIENTI COSTANTI, derivano dal fatto che le caratteristiche sono lineari

EQUAZIONI DI BIPOLI INERTI (perché passeranno per lo zero)

$$\begin{cases} v_1 = R_{11} i_1 + R_{12} i_2 \\ v_2 = R_{21} i_1 + R_{22} i_2 \end{cases}$$

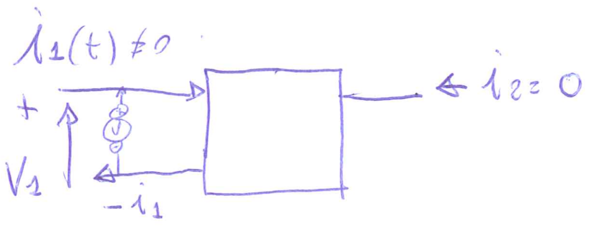
$$i = \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{bmatrix} \quad v = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} \quad R = \begin{bmatrix} R_{11} & R_{12} \\ R_{21} & R_{22} \end{bmatrix} \Rightarrow v = Ri$$

R = matrice di resistenze o matrice a vuoto

Proviamo a ricavare il coeff. R_{11} → apro la porta 1

sarà il rapporto tra tensione e corrente alla porta 1 con la porta due lasciata aperta.

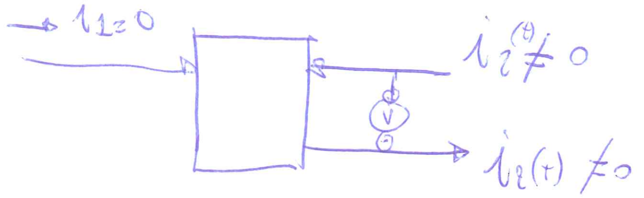
$$R_{11} = \frac{v_1}{i_1}\Big|_{i_2=0}$$



Analogamente per il coefficiente R_{12} (tengo aperta la porta 1) e inietto la corrente alla porta 2 su cui anche misuro la tensione

si ottengono i parametri di resistenza

$$R_{22} = \frac{v_2}{i_2}\Big|_{i_1=0}$$



Le mutue resistenze sono

$$R_{12} = \frac{V_1}{i_2}\Big|$$

In maniera duale il doppio bipolo controllato in tensione

$$\begin{cases} i_1 = G_{11} v_1 + G_{12} v_2 \\ i_2 = G_{21} v_1 + G_{22} v_2 \end{cases}$$

MATRICE DI CONDUTTANZA
MATRICE DI CORTO CIRCUITO
(è l'inversa della matrice di resistenza e non viceversa)

$$i = \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{bmatrix} \qquad v = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} \qquad G = \begin{bmatrix} G_{11} & G_{12} \\ G_{21} & G_{22} \end{bmatrix} \qquad i = Gv$$

non confondere i coefficienti della matrice di conduttanza con le conduttanze.
Le unità di misura sono i siemens

$$\begin{cases} G_{11} = \dfrac{i_1}{v_1}\Big|_{v_2 = 0} & G_{12} = \dfrac{i_1}{v_2}\Big|_{v_1 = 0} \\ G_{21} = \dfrac{i_2}{v_1}\Big|_{v_2 = 0} & G_{22} = \dfrac{i_2}{v_2}\Big|_{v_1 = 0} \end{cases}$$

SIGNIFICA CHE LA PORTA 2 STAVOLTA È IN CORTO CIRCUITO

MUTUE CONDUTTANZE DI CORTO CIRCUITO.

in elettronica si usano le matrice ibride di conduttanza, (di parametri h). TRANSISTOR IGBT TRIPOLI IN GENERE RAPPRESENTATI COME DOPPI BIPOLI in cui le grandezze indipendenti sono COMBINAZIONI delle altre RAPPRESENTAZIONE IBRIDA

$$\begin{cases} v_1 = h_{11} i_1 + h_{12} v_2 \\ i_2 = h_{21} i_1 + h_{22} v_2 \end{cases}$$

$$h = \begin{bmatrix} \overset{[\Omega]}{h_{11}} & h_{12} \\ h_{21} & \underset{[\text{siemens}]}{h_{22}} \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} V_1 \\ i_2 \end{bmatrix} = h \begin{bmatrix} i_1 \\ v_2 \end{bmatrix}$$

adimensionale

adimensionale

matrice ibrida perché le unità di misura dei coefficienti non sono omogenee.

VEDIAMO IL MODO OPERATIVO DI DEFINIZIONE MATRICE IBRIDA 1 $[h]$

AUTORESISTENZA

$$h_{11} = \left.\frac{V_1}{i_1}\right|_{v_2=0} \quad [\Omega]$$

RAPPORTO DI TRASFERIMENTO DI TENSIONE

$$h_{12} = \left.\frac{V_1}{V_2}\right|_{i_1=0} \quad [0]$$

con la porta 1 a vuoto

RAPP. DI TRASFERIMENTO DI CORRENTE

$$h_{21} = \left.\frac{i_2}{i_1}\right|_{v_2=0} \quad [0]$$

con la porta 2 in corto circuito

AUTO CONDUTTANZA

$$h_{22} = \left.\frac{i_2}{v_2}\right|_{i_1=0} \quad [\text{Siemens}]$$

MATRICE IBRIDA 2

$$\begin{cases} i_1 = g_{11} v_1 + g_{12} i_2 \\ v_2 = g_{21} v_1 + g_{22} i_2 \end{cases}$$

$$g = \begin{bmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} i_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = g \begin{bmatrix} V_1 \\ i_2 \end{bmatrix}$$

matrice ibrida 2

Parametri della matrice ibrida 2 sono definiti nella stessa maniera

in totale sono 4 matrici

1) matrice di resistenza
2) matrice di conduttanza
3) matrice ibrida 1
4) matrice ibrida 2

I parametri delle matrici sono rapporti tra un effetto e una causa in quanto tali sono FUNZIONI DI TRASFERIMENTO.
Lo sono in particolare i coefficienti mutui (R_{12}, R_{21}) (G_{12}, G_{21}), (h_{12}, h_{21}), (g_{12}, g_{21})

RAPPRESENTAZIONE DI TRASMISSIONE 1 (Sollecito una grandezza alla porta 1 e verifico cosa succede alla porta 2)

cioè si considerano le grandezze ad una porta rispetto a un'altra porta.

$$\begin{cases} v_1 = A v_2 - B i_2 \\ i_1 = C v_2 - D i_2 \end{cases}$$

Forma matriciale

$$T = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} v_1 \\ i_1 \end{bmatrix} = T \begin{bmatrix} v_2 \\ -i_2 \end{bmatrix}$$

T è in funzione di $(v_2, -i_2)$

matrice di trasmissione 2

$$v_2 = A' v_1 + B' i_1$$
$$-i_2 = C' v_1 + D' i_1$$

$$T' = \begin{bmatrix} A' & B' \\ C' & D' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_2 \\ -i_2 \end{bmatrix} = T' \begin{bmatrix} v_1 \\ i_1 \end{bmatrix}$$

Segno meno
perché che la convenzione degli utilizzatori alle porte.

DIMENSIONI DELLA MATRICE A PARAMETRI T (TRASMISSIONE)

$$\begin{cases} A = \left.\dfrac{V_1}{V_2}\right|_{i_2=0} \ [0] & B = -\left.\dfrac{V_1}{i_2}\right|_{v_2=0} \ [\Omega] \\ C = \left.\dfrac{i_1}{V_2}\right|_{i_2=0} \ [S] & D = \left.-\dfrac{i_1}{i_2}\right|_{v_2=0} \ [0] \end{cases}$$

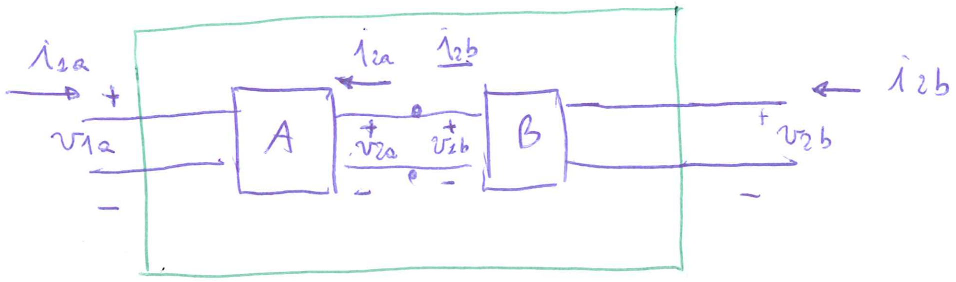
ADIMENSIONALE

ADIMENSIONALE

Analogamente per la matrice di trasmissione 2 detta matrice T'.

Le matrici di trasmissione non possono essere ottenute come funzioni di trasferimento

APPLICAZIONE (collegamento di due doppi bipoli che rappresentano lunghe linee elettriche con le loro derivazioni dei carichi)



$$\begin{bmatrix} v_{2a} \\ -i_{2a} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_{1b} \\ i_{1b} \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} v_{2a} \\ -i_{2a} \end{bmatrix} = T'_a \begin{bmatrix} v_{1a} \\ i_{1a} \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} V_{2b} \\ -i_{2b} \end{bmatrix} = T' \begin{bmatrix} v_{1b} \\ i_{1b} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} v_{2b} \\ -i_{2b} \end{bmatrix} = T'_b \begin{bmatrix} V_{1b} \\ i_{1b} \end{bmatrix} = T'_b \begin{bmatrix} v_{2a} \\ -i_{2a} \end{bmatrix} = T'_b T'_a \begin{bmatrix} v_{1a} \\ i_{1a} \end{bmatrix} = T'_{eq} \begin{bmatrix} V_{1a} \\ i_{1a} \end{bmatrix}$$

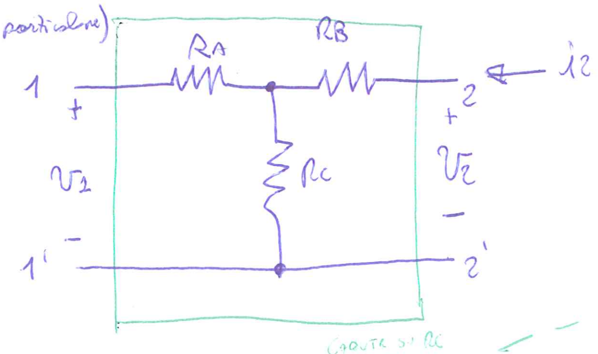
$$T'_{eq} = T'_b T'_a$$

si fa il prodotto delle matrici di trasmissione.

VEDIAMO DEGLI ESEMPI

ipotizzando che ci siano solo resistenze (caso particolare)

$$\boxed{R_\Delta^2 = R_a R_b + R_b R_c + R_c R_a}$$



Partitori di Tensione

$i_2 = 0$: $\quad v_1 = (R_a + R_c)\, i_1 \qquad v_2 = R_c i_1 \qquad v_2 = \dfrac{R_c}{R_a + R_c} v_1$

$i_1 = 0$: $\quad v_2 \; (R_b + R_c)\, i_2 \qquad v_1 = R_c i_2 \qquad v_1 = \dfrac{R_c}{R_b + R_c} v_2$

Cadute di R_c perché la porta sono aperte.

$v_2 = 0$: $\quad v_1 = \dfrac{R_\Delta^2}{R_b + R_c} i_1 \qquad i_2 = -\dfrac{R_c}{R_b + R_c} i_1 \qquad i_2 = -\dfrac{R_c}{R_\Delta^2} \cdot v_1$

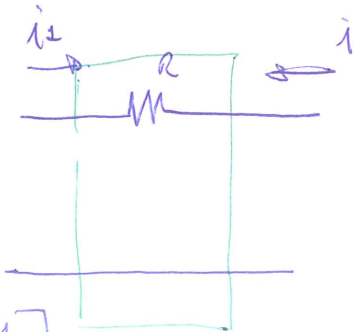
$v_1 = 0$: $\quad v_2 = \dfrac{R_\Delta^2}{R_a + R_c} i_2 \qquad i_1 = \dfrac{-R_c}{R_a + R_c} i_2 \qquad i_1 = \dfrac{-R_c}{R_\Delta^2} v_2$

significa che la porta indicata è posta in corto circuito.

Le domande che possono essere poste all'esame è:
dato un doppio bipolo, calcolare i coefficienti della matrice di trasmissione o della matrice a parametri ibridi h o delle altre matrici.

ESEMPIO DI UNA LINEA IN CONTINUA

$$G = \begin{bmatrix} \frac{1}{R} & -\frac{1}{R} \\ -\frac{1}{R} & \frac{1}{R} \end{bmatrix}$$



La matrice di resistenza non esiste per questo doppio bipolo. PERCHÉ? in certi casi si ha $\frac{\emptyset}{\emptyset}$ quindi impossibile.

$$h = \begin{bmatrix} R & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \qquad g = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & R \end{bmatrix}$$

$$T = \begin{bmatrix} 1 & R \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad T' = \begin{bmatrix} 1 & -R \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

La matrice di conduttanze (quando esiste) è l'inversa della matrice di resistenza

$$G = R^{-1}$$

Si ha anche che $g = h^{-1}$ $\quad T' = T^{-1}$

bisogna ricavare la matrice inversa con le regole della geometria

Vediamo come definire le caratteristiche del doppio bipolo

Quando il doppio bipolo è reciproco?

$$\left.\frac{v_1}{i_2}\right|_{i_1=0} = \left.\frac{v_2}{i_1}\right|_{i_2=0} \Rightarrow \left.\frac{i_1}{v_2}\right|_{v_1=0} = \left.\frac{i_2}{v_1}\right|_{v_2=0}$$

$$\left.\frac{i_1}{i_2}\right|_{v_1=0} = -\left.\frac{v_2}{v_1}\right|_{i_2=0} \qquad \left.\frac{v_1}{v_2}\right|_{i_1=0} = -\left.\frac{i_2}{i_1}\right|_{v_2=0}$$

Equivalgono a

$R_{12} = R_{21}$ $\qquad G_{12} = G_{21}$

$h_{12} = -h_{21}$)

RECIPROCITÀ E SIMMETRIA

Simmetria: sussistono 1 è reciproco e inoltre vale anche che le tensioni e correnti non cambiano (scambiando) fra loro la porta 1 e porta 2

Equivalgono alla reciprocità e inoltre

$R_{11} = R_{22}$ $\qquad G_{11} = G_{22}$

$h_{11} h_{22} + h_{12}^2 = 1$ $\qquad g_{11} g_{22} + g_{12}^2 = 1$

$A = D$ $\qquad A' = D'$

PASSIVITÀ dei doppi bipoli di ordine zero

La potenza entrante deve essere maggiore di zero.

La somma delle potenze entranti deve essere maggiore o uguale a zero

$$p(t) = v_1(t)\, i_1(t) + v_2(t)\, i_2(t) = 0$$

$R \Rightarrow$ $\quad p = R_{11} i_1^2 + (R_{12} + R_{21}) i_1 i_2 + R_{22} i_2^2 \geq 0$

Tramite la matrice di resistenza

Pertanto $\quad R_{11} \geq 0 \qquad R_{22} \geq 0$

è l'equazione di una parabola

$$y(x) = R_{11} x^2 + (R_{12} + R_{21}) x + R_{22} \geq 0 \qquad x = \frac{i_1}{i_2}$$

definisce che il discriminante è ≥ 0

$(b^2 \, 4ac) \geq 0$

$$R_{12} R_{22} \geq \left(\frac{R_{12} + R_{21}}{2}\right)^2$$

QUINDI PER LE CONDUTTANZE

$$\boxed{G \Rightarrow \quad G_{11} \geq 0 \qquad G_{22} \geq 0 \qquad G_{11} G_{22} \geq \left(\frac{G_{12} + G_{21}}{2}\right)^2}$$

ABBIAMO VISTO LE CONDIZIONI DI

- RECIPROCITÀ
- SIMMETRIA
- PASSIVITÀ

Ci sono delle proprietà che ci permettono di dire se il doppio bipolo è solo Resistivo.

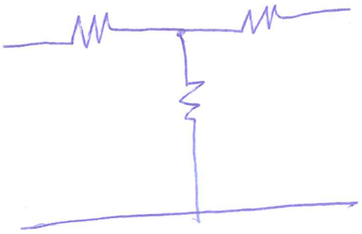
1) deve essere passivo $\quad R_{11} \geq 0 \quad R_{22} \geq 0 \quad R_{11} R_{22} \geq \left(\frac{R_{12} + R_{21}}{2}\right)^2$

2) deve essere reciproco $\quad R_{12} = R_{21}$

3) non deve amplificare $\quad R_{11} \geq |R_{21}| \qquad R_{22} \geq |R_{12}|$

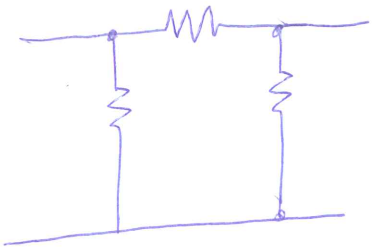
Può essere sintetizzato con una rete di 3 resistori a T o a Π

se valgono le tre proprietà ho definito il doppio bipolo RESISTIVO



RETE A T

conviene studiare la matrice di Resistenza



RETE A Π

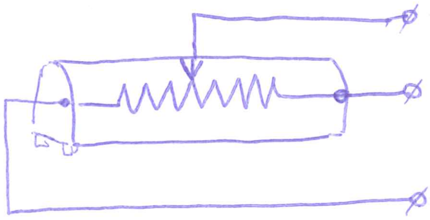
conviene studiare la matrice di conduttanza

venerdì prossima si vedono i calcoli per lo sviluppo delle matrici.
mercoledì e giovedì esercitazioni di laboratorio con l'ing. Siena Elisabetta
Dughiero sarà in missione.

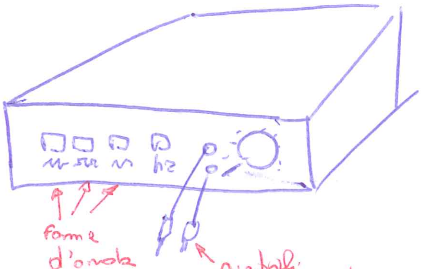
28/03/2012 Lez. n° 14 Dughiero è in missione a Bruxell quindi la lezione è tenuta dall'ing. Siena Elisabetta.

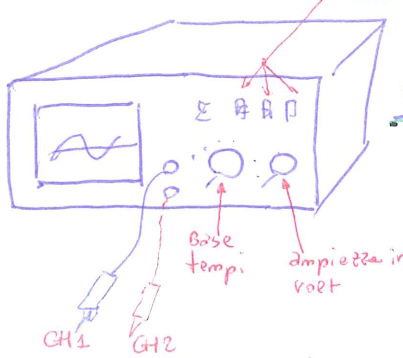
Si eseguono misure sulle caratteristiche esterne dei bipoli e misure con oscilloscopio.

REOSTATO (o TRIMMER DI POTENZA)



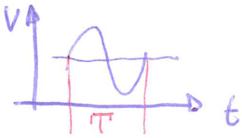
GENERATORE DI FUNZIONE





OSCILLOSCOPIO

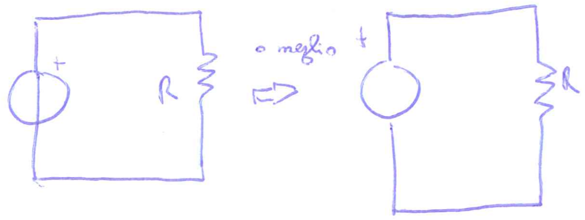
(voltmetro in funzione del tempo, il quadrante è tarato così



T = periodo

$\frac{1}{T}$ = frequenza $\frac{1}{s} = s^{-1} = Hz$

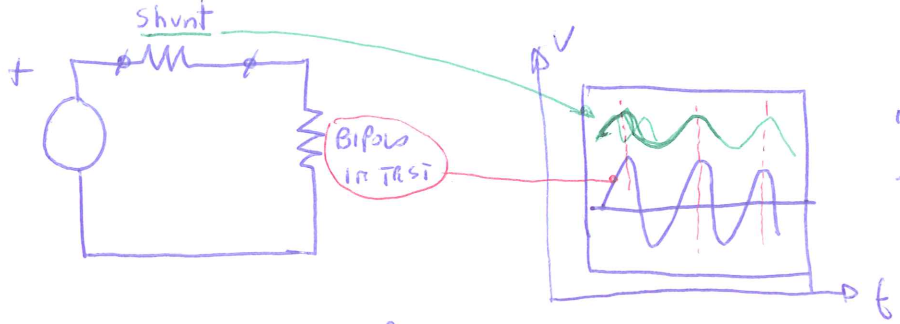
Oscilloscopio → Voltmetro in funzione del tempo. ci sono alcuni controlli di base che sono basi tempi per visualizzare il periodo dentro al quadrante senza perdita di informazione, e ampiezza in tensione che mostra la forma in verticale dentro al quadrante (amplifica o attenua (conservando un fattore di scala) vediamo alcune misure elementari sui bipoli



il generatore è generico ovvero non specificatamente un GIT

misurando con l'oscilloscopio non cambia nulla

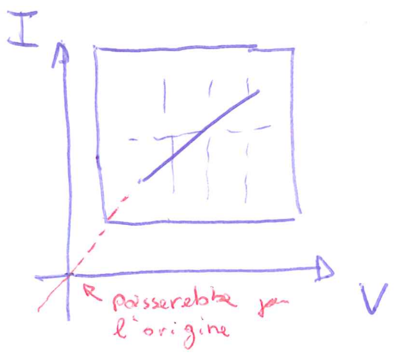
aggiungiamo al circuito un resistore di schunt



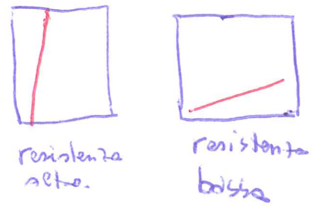
i due segnali sono in fase perché il carico è resistivo

anche cambiando forma d'onda non c'è alcuna modifica di fase (onda triangolare, dente di sega, quadrata)

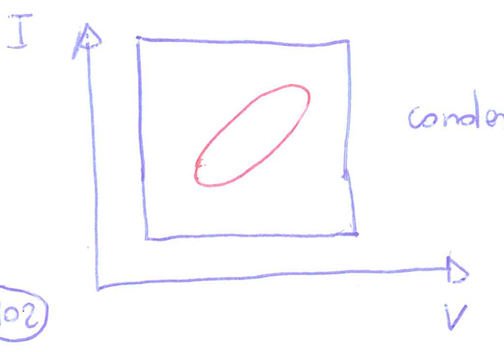
La caratteristica deve essere una retta con inclinazione pari a "R" (coeff. angolare)



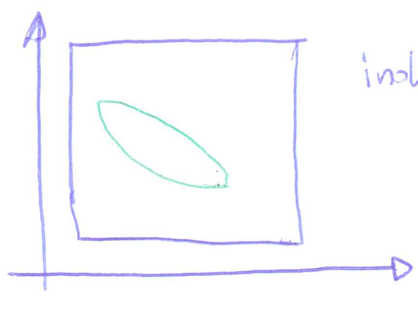
imposto l'oscilloscopio su X-Y vedo la retta.
cambiando la resistenza sui puntali cambia l'angolo infatti $V = RI$
coeff. angolare



Le forme d'onda vengono cambiate agendo sui tasti del generatore di funzione.



condensatore



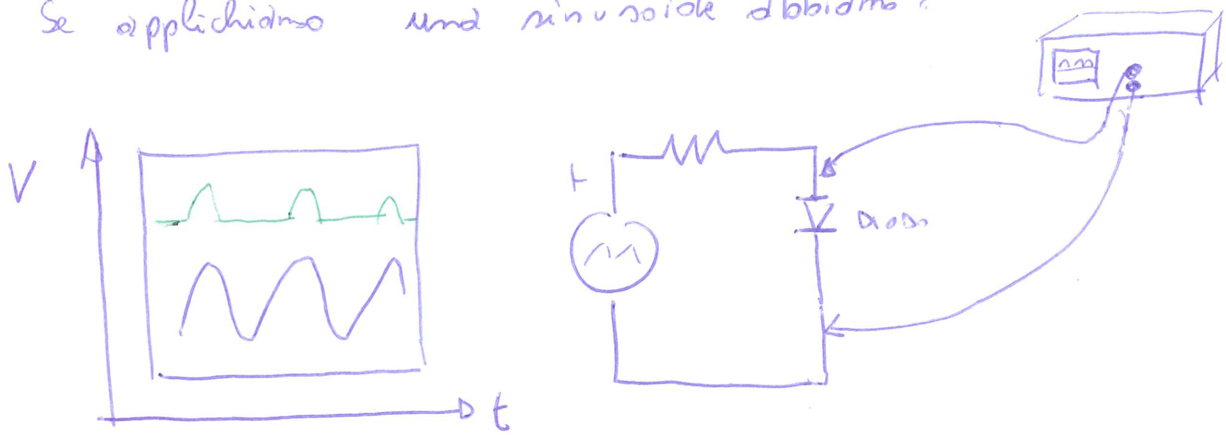
induttore

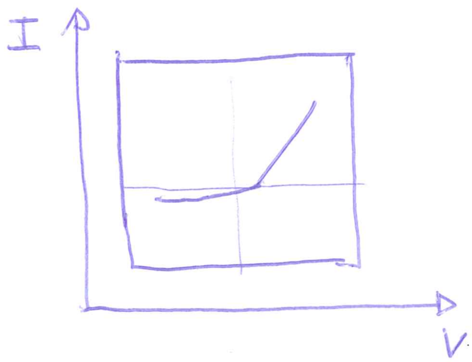
Le sinusoidi nei condensatori e induttori non cambiano forma, solo fase.

Le forme di onde quadre, triangolari invece cambiano dato che funzionano come filtri e eliminano delle armoniche ovvero gli spigoli delle onde quadre.

VEDIAMO IL DIODO

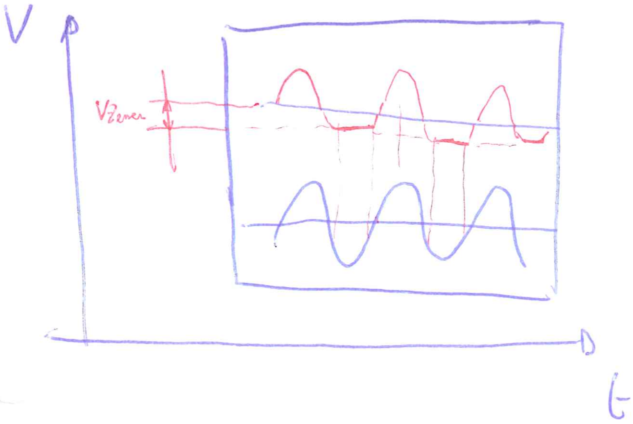
Se applichiamo una sinusoide abbiamo:



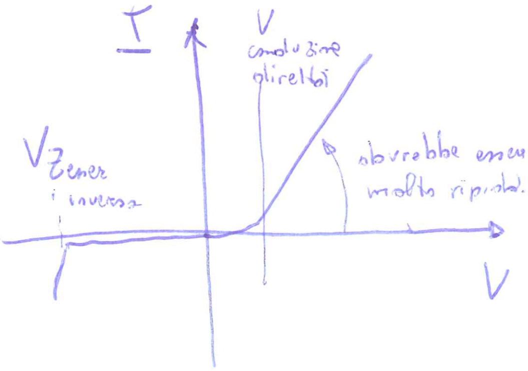


DIODO NORMALE
RETTIFICATORE AL SILICIO

VEDIAMO IL DIODO ZENER

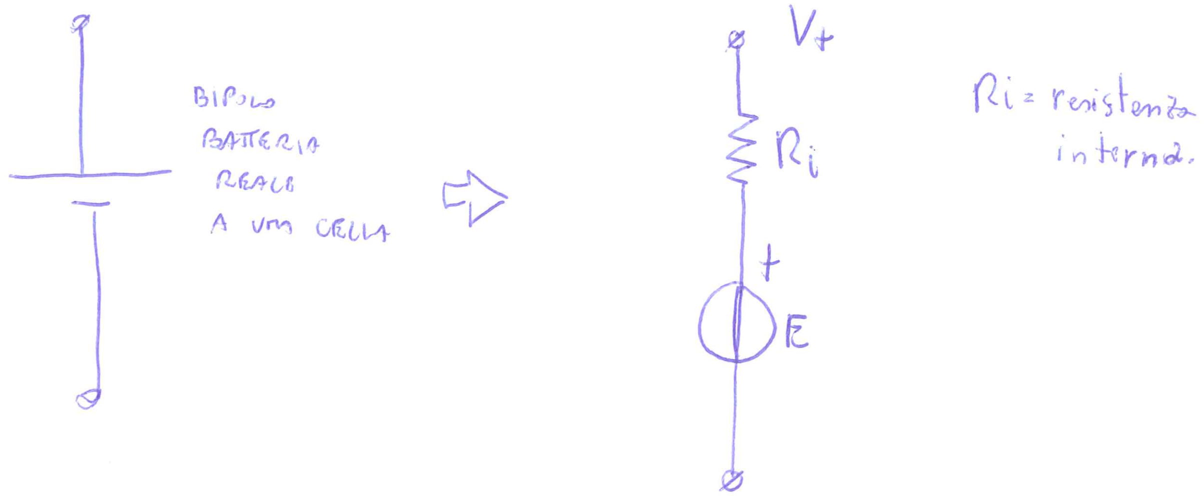


Vzener è la tensione di zener o di conduzione controllata inversa

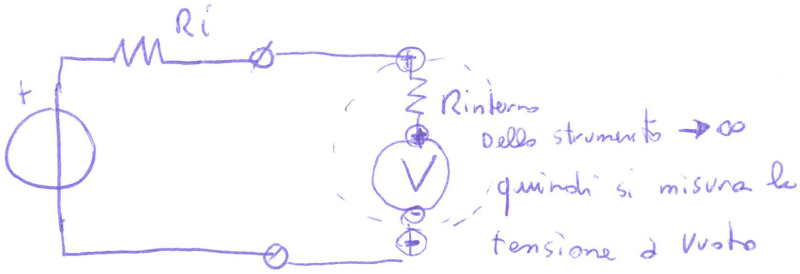


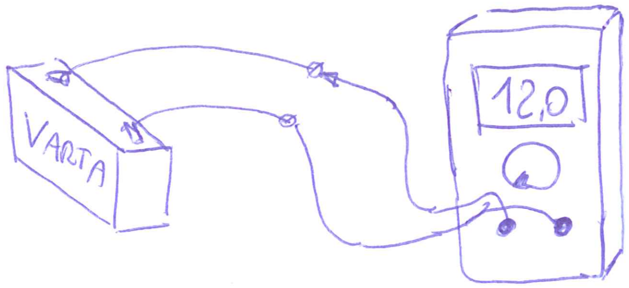
Vediamo una batteria vista come generatore reale di tensione

Usiamo un multimetro digitale nelle posizioni Voltmetro e amperometro per misurare la resistenza interna della batteria

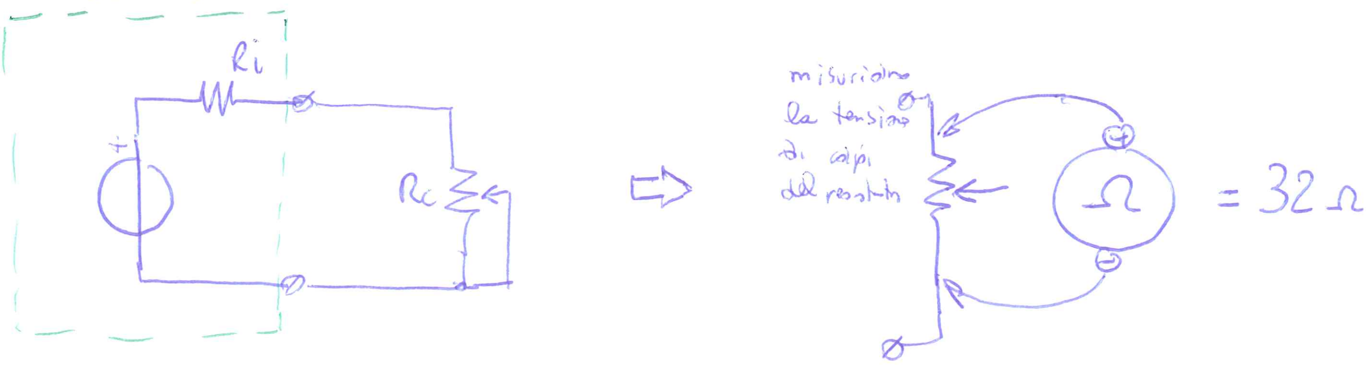


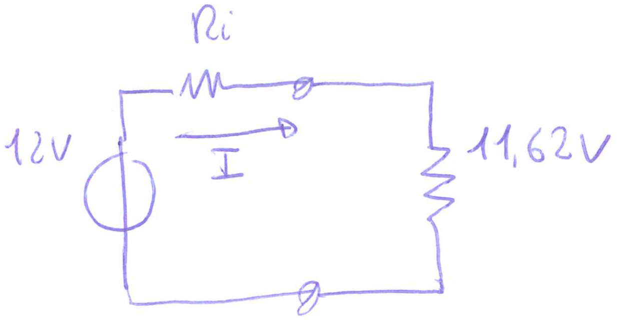
il circuito in "test" è il seguente





aggiungiamo il resistore al circuito.





quindi calcoliamo Ri

$12 - 11,62 = 0,38$ Volt

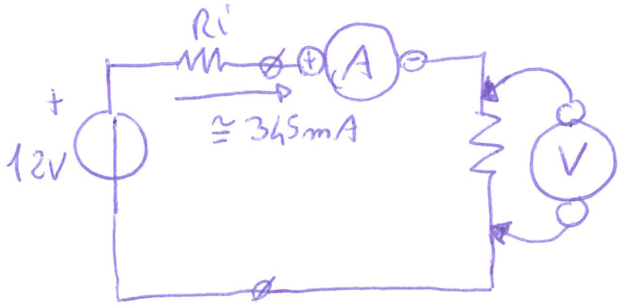
tensione sulla Ri, poi trovo la I,

$V = Ri\,I \Rightarrow \boxed{\frac{V}{Ri} = I}$ 0,36 A

Il valore della resistenza interna è quindi

$$Ri = \frac{V}{I} \Rightarrow Ri = \frac{0,38}{0,36\,A} = 1,056\,\Omega$$

Gli strumenti sono stati inseriti così:



la $I_{mis} = 345\,mA$

mis = misurata.

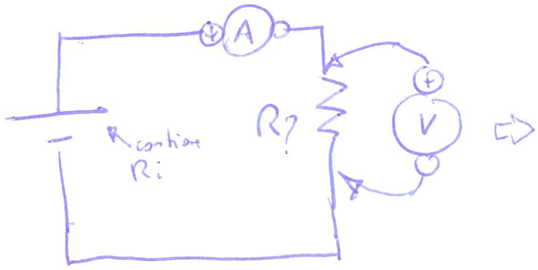
Facciamo la prova a ricalcolare la resistenza interna usando la I_{mis}.

$$\frac{V_{ri}}{I_{mis}} = 1,101\,\Omega \text{ con } I_{mis}$$

Ora facciamo delle prove con delle resistenze di carico incognite.

$I_{mis} = 77\,mA$

$V_{carico} = 11,69\,V$



⇒ $R_? = 151,8$

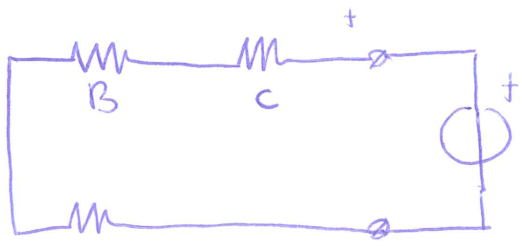
misurando infatti risulta

$R_{c\,mis} = 152$

(ovviamente coincide)

Facciamo dei test di misura di resistenza incognita

assembliamo in cattedra il circuito



ABBIAMO DISPONIBILI

1) Un generatore variabile (lo impostiamo (a +5V

2) 2 multimetri digitali

vengono chiamati degli studenti in cattedra per fare le misure

1) misuriamo le resistenze R_A, R_B, R_C → 403,8 , 202,2 , 100 Ω

2) misuriamo il generatore → $V_+ = 5V$

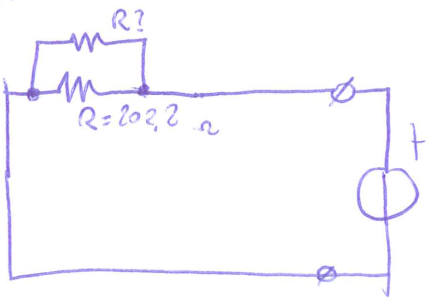
3) misuriamo le tensioni V_{RA}, V_{RB}, V_{RC} → 2,867 V , 1,485 , 0,704

misuriamo la corrente

da $V = R_{TOT} \cdot I$ si ha $I = \frac{V}{R_{TOT}} = \frac{5V}{706\ \Omega} \cong 7\ mA$

Facciamo altre prove bypassando alcune R e misurando le correnti che risultano.

il circuito nuovo diventa:



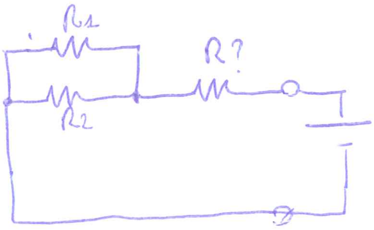
valore iniziale della $i = 24,5\ mA$

valore dopo inserimento di R? ⇒ $i_{R?} = 48,6$

ne consegue che la R? in parallelo ha lo stesso valore di quella iniziale dato che due resistenze uguali in parallelo comportano una corrente doppia all'ingresso del parallelo.

L'ingegnere Valentina Siena propone vari esercizi che gli studenti eseguono in cattedra proiettando l'operato alla platea con la webcam.

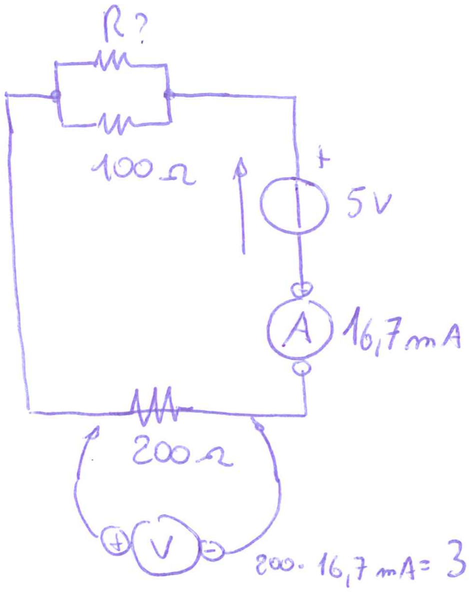
Esercizi proposti



R1 e R2 note

trovare R?

secondo esercizio



$200 \cdot 16{,}7\,mA = 3{,}3\,V$

SOLUZIONE

Proviamo ad applicare il partitore di corrente al nodo e poi per la LKC si ottiene la $I_{R?}$

Poi con la legge di Ω si ottiene il valore della $R_?$ che vale circa 3 KΩ

(misurando si ottiene 3200 Ω che conferma il risultato)

se dico che $J = 16{,}7\,mA$ sulla R da 100 Ω si ha

allora per il partitore di corrente

$$\begin{cases} I_{R_{100}} = \dfrac{J}{R_{100} + R_?} \cdot R_? \\ \\ R_{\parallel} = \dfrac{R_{100} \cdot R_?}{R_{100} + R_?} \end{cases}$$

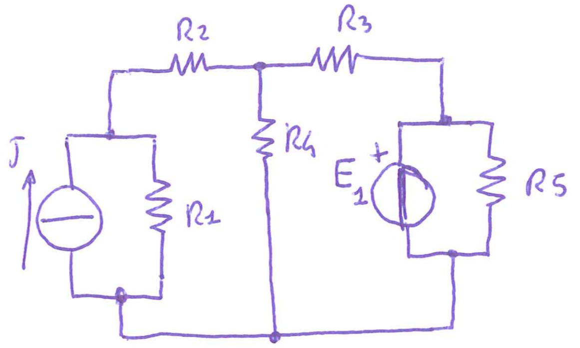
$$R_1 R_2 (R_1 - R) R_2$$

ESERCIZIO SEMPLICE MA SIGNIFICATIVO Ing. GOTTARDO (su)

Data la rete lineare in figura, trovare la caratteristica esterna di R_4 e calcolare la potenza **fornita** dai due generatori: J_1 e E_1

Si eseguano i seguenti passaggi

1) applicazione del P.S.E.
2) applicazione del metodo delle correnti di anello
3) applicazione del metodo dei potenziali nodali
4) applicazione del teorema di thevenin
5) applicazione del teorema di Norton
6) Verifica del teorema di tellegen



$J_1 = 1A$

$E_1 = 20V$

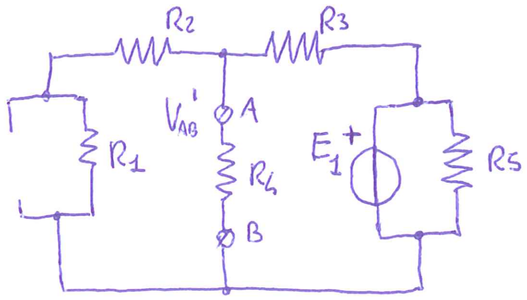
$R_5 = R_2 = R_3 = R_4 = 10\Omega$

$R_1 = 25\Omega$

Soluzione In primo luogo facciamo attenzione a non confondere E_1 con un generatore di corrente come verrebbe spontaneo osservando con superficialità la topologia della rete. E_1 è un generatore IDEALE di tensione.

Applico il P.S.E. facendo agire i generatori uno alla volta, ed aggiungo i morsetti A-B a cui stimo i parametri cercati.

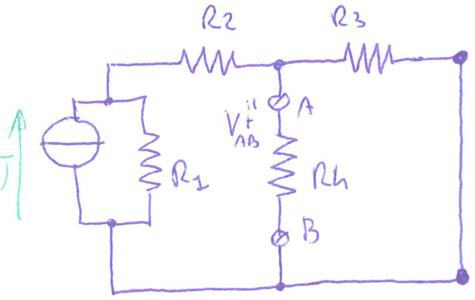
ANNULLIAMO I GENERATORI (Togliere i cerchi)



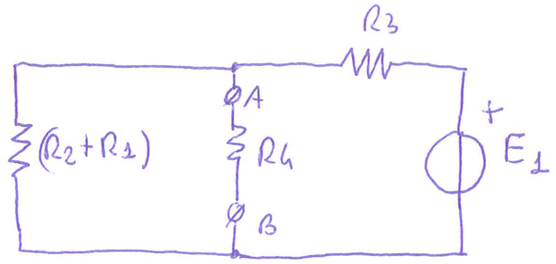
CALCOLO V_{AB}'

La resistenza R_5 non è influente (vedi schema del calcolo sulla pagina successiva)

$$V_{AB} = V_{AB}' + V_{AB}''$$



CALCOLO V_{AB}''



Rs si trascura per definizione di parallelo di bipoli

> DUE BIPOLI SI DICONO IN PARALLELO QUANDO HANNO DUE MORSETTI IN COMUNE E SONO "APPESI" (E VI È APPLICATA) LA STESSA TENSIONE

creo un partitore mettendo provvisoriamente in parallelo $(R_2+R_1)//R_4$ così ottengo la tensione al nodo A che corrisponde a V_{AB}'

$$R_{//} = \frac{(R_2+R_1)\cdot R_4}{R_2+R_1+R_4} = \frac{(10+25)\cdot 10}{(10+25+10)} = \frac{350}{35} = 10\,\Omega$$

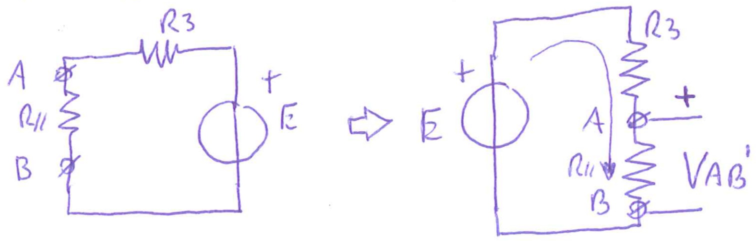
Applico il partitore resistivo di tensione e trovo V_{AB}'

$$\boxed{V_{AB}' = \frac{E_1}{R_3+R_{//}}\cdot R_{//}}$$

Il partitore resistivo può essere enunciato in maniera semplificata come segue:

La tensione ripartita da due resistenze è pari alla tensione applicata alle due diviso la somma delle due moltiplicato quella di cui capi voglio ottenere il valore ripartito

Il riferimento della tensione ripartita si ottiene dal fatto che le resistenze sono sempre convenzionate da utilizzatori.



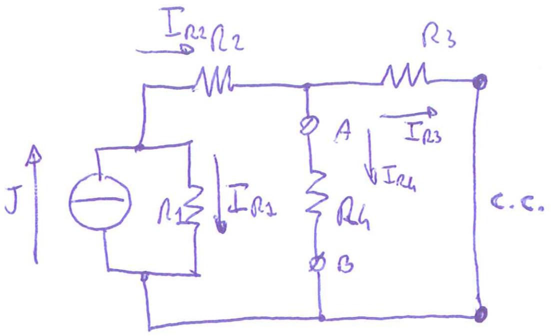
Posso affermare che V_{AB}' è proprio V_{R_4}' perché richiamo nuovamente la definizione di bipoli in parallelo.

$$\boxed{V_{AB}' = \frac{20\,V}{10+10}\cdot 10 = 10\,V}$$

ASSOLUTAMENTE VIETATO CALCOLARE ADESSO UNA POTENZA PARZIALE SU R_4 PERCHÉ QUESTA GRANDEZZA
1) NON È LINEARE 2) NON È ESTERNA
3) NON È SOVRAPPONIBILE.

Facciamo agire il secondo generatore

si nota che la resistenza Rs ancora è ininfluente perché si trova in parallelo ad un bipolo corto circuito ideale. ne consegue che la d.d.p di suoi capi è pari a $\emptyset$ e di conseguenza $I_{RS}=0$



La tensione V_{AB}'' che stiamo cercando è senz'altro data da:

$$V_{AB}'' = I_{R4} \cdot R_4$$

ovvero la legge di Ohm.

La corrente I_{R4} è quella calcolata con un partitore di corrente in cui la corrente entrante è la I_{R2}. Il partitore di corrente si può enunciare così:

> La corrente ripartita da un partitore resistivo è pari alla corrente impressa che entra nel partitore, divisa per la somma delle resistenze, moltiplicata per quella resistenza che NON è interessata dal passaggio di quella che sto cercando.

$$I_i = \frac{G_i}{\sum_{i=1}^{n} G_i} I^\circ$$

La corrente I_{R2} è a sua volta data dal partitore di corrente tra la resistenza R_1 e R_2, difatti durante il corso di Dughiero si suggerisce di partire sempre a stimare i calcoli dai bipoli più lontani alla porta in cui si cerca.

Calcolando concretamente:

$$\boxed{I_{R2} = \frac{J}{R_1 + R_{TOT_{com}}} \cdot R_{TOT_{com}}}$$

con $R_{TOT_{com}}$ = Resistenza totale complementare vista dai nodi del generatore di corrente della nostra rete esclusa però R_1

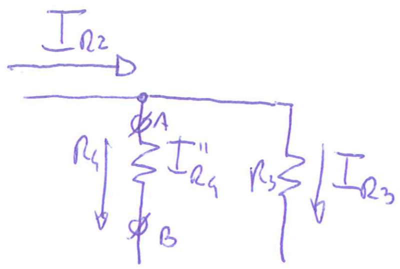
$$R_{TOT_{com}} = (R_3 // R_4) + R_2 = 5 + 10 = 15\ \Omega$$

ci tornerà utile più avanti anche I_{R3}' =

quindi

$$I_{R2} = \frac{1}{25 + 15} \cdot 25 = 0{,}625\ A$$

questa corrente va ulteriormente ripartita



si ottiene $I''_{R4} = \frac{I_{R2}}{R_3 + R_4} \cdot R_3$

sostituendo i valori abbiamo

$$\boxed{I''_{R4} = \frac{0,625}{10+10} \cdot 10 = 0,3125\,A}$$

ora con la legge di Ohm calcoliamo $V''_{R4} = I''_{R4} \cdot R_4$

$$\boxed{V''_{R4} = 0,3125 \cdot 10 = 3,125\,V}$$

Possiamo sovrapporre le tensioni ed ottenere V_{AB}

$$\boxed{V_{AB} = V'_{R4} + V''_{R4} = 10 + 3,125 = 13,125\,V}$$

$$\boxed{I_{AB} = \frac{V_{AB}}{R_4} = \frac{13,125\,V}{10} = 1,3125\,A}$$

Ora posso trovare la potenza fornita dai due generatori e dissipata sulla sola R_4 tramite (la parte di potenza dissipata su R_4)

$$P_{R4} = R_4 \cdot I_{AB}^2 = 10 \cdot 1,3125^2 = 17,226 \text{ WATT}$$

Le potenze dei due generatori si calcolano sulla rete originale con i parametri calcolati con "tutto connesso", quindi è necessario sapere la corrente totale su R_1 data come sovrapposizione della corrente dovuta al generatore J_1 e più quella dovuta al generatore E_1

corrente totale su R_1
$$\left\{\begin{array}{ll} I'_{R1} = J - I_{R2} \quad (LKC) & I'_{R1} = 1 - 0,685 = 0,375\,A \\ + & \\ I''_{R1} = \frac{V'_{AB}}{R_2 + R_1} = \frac{10\,V}{35} = 0,2857\,A & \end{array}\right.$$

$$\boxed{I_{R'} : I'_{R1} + I''_{R1} = 0,2857\,A + 0,375} = $$ con questa corrente trovo la tensione V_J

$$V_J = R_1 \cdot I_{R1} = 25 \cdot 0,2857 = 7,1428 \text{ volt}$$

quindi la potenza erogata vale $P_J = V_J \cdot J$

$$\boxed{P_J = V_J \cdot J = 7,1428 \cdot 1_A = 7,1428 \text{ Watt}}$$

La potenza su E_1 (messa in gioco da E_1) è pari a $P_{E_1} = E_1 I_1$

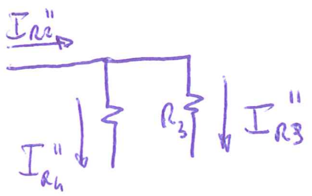
con E_1 = al proprio parametro impresso e I_1 corrente che attraversa il generatore, facendo attenzione al fatto che nella rete originale c'è un nodo.

$$I_{5_{TOT}} = \frac{E_1}{R_5} \quad \text{per definizione di parallelo} \quad I_5 = \frac{20}{10} = 2A$$

$$I'_{R3} = \frac{E_1}{(R_3 + R_{11})} = \frac{20}{10+10} = 1A$$

corrente su R_3 dovuta all'azione del solo generatore di tensione.

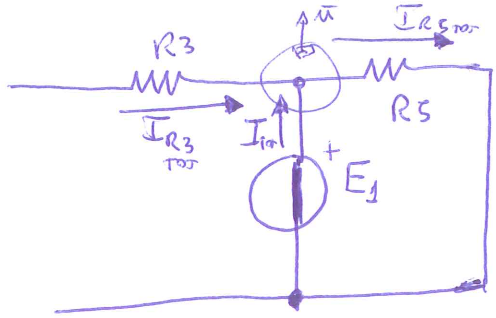
$$I''_{R3} = I''_{R2} - I''_{R4} = 0,625 - 0,3125 = 0,3125 \; [A]$$



$$I'''_{R5} = \frac{E_1}{R_5} = \frac{20}{10} = 2 \text{ A}$$

I'_{R3} e I'''_{R5} sono le correnti dovute dal E_1 con il generatore di corrente spento, mentre I''_3 sono le correnti su R_3 con il generatore J acceso.

La situazione circuitale complessiva è:



APPLICANDO LKC SUL NODO ABBIAMO

$-I_{R3_{TOT}} - I_{TOT} + I_{R5_{TOT}} = 0$

da cui, risolvendo si ha:

$I_{R5_{TOT}} = I_{R3_{TOT}} + I_{TOT}$

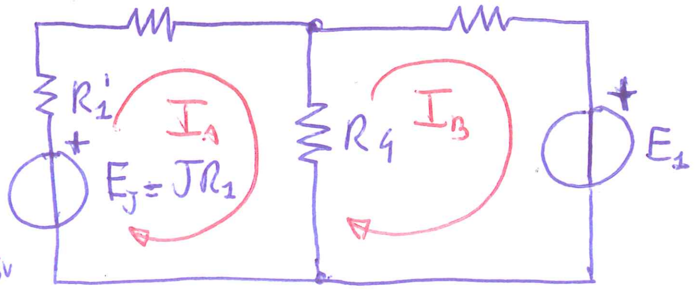
RISOLTA RISPETTO A $I_{TOT} = I_{R5_{TOT}} - I_{R3_{TOT}}$

$I_{TOT} = 2A - 0{,}3125 = 1{,}6875 [A]$ corrente erogata dal generatore E_1 in condizioni normali di funzionamento.

La potenza reale quindi

$$\boxed{P_{E_1} = E_1 \cdot I_{TOT} = 20 \text{ per } 1{,}6875 = 33{,}75 \text{ W.}}$$

Risolviamo il medesimo esercizio con l'applicazione del metodo delle correnti di anello.
Ridisegnamo lo schema e adeguiamo la rete, in cui mi accorgo si deve applicare solo **due** dei tre casi specificati in precedenza (vedi pagina 69 primo metodo) generatore di tensione con in parallelo una R, generatore reale di corrente che viene convertito in un generatore di tensione reale.
La rete adeguata diventa:



$E_J = 1 \cdot 25 = 25V$

R5 si elide per le ragioni viste a pag 69 si identificano due anelli indipendenti

$$\begin{cases} I_A (R_1' + R_2 + R_4) - I_B R_4 - E_J = 0 \\ -I_A R_4 + I_B (R_3 + R_4) + E_1 = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} I_A 45 - I_B 10 = 25V \\ -I_A 10 + I_B 20 = -20 \end{cases}$$

da questo ricavo la matrice associata al sistema e ne verifico la simmetria

$$\begin{bmatrix}45 & -10\\ -10 & 20\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}25\\ -20\end{bmatrix}$$

moltiplico la prima riga per 10 e la seconda per 45, si ottiene

$$\begin{bmatrix}450 & -100\\ -450 & 900\end{bmatrix} \begin{bmatrix}250\\ -900\end{bmatrix}$$

sommo la prima alla seconda ed ottengo la matrice triangolare.

$$\begin{bmatrix}450 & -100\\ 0 & 800\end{bmatrix} \begin{bmatrix}250\\ -650\end{bmatrix}$$

da cui si ricava $I_B = -\dfrac{650}{800}$

$$I_B = -0{,}8125\ A$$

divido la prima riga per 10 e poi sostituisco e risolvo l'equazione

$$I_a\,45 - I_b\,10 = 25$$

$$I_a\,45 = 25 + (I_b)\,10$$

$$I_a\,45 = 25 - 8{,}125$$

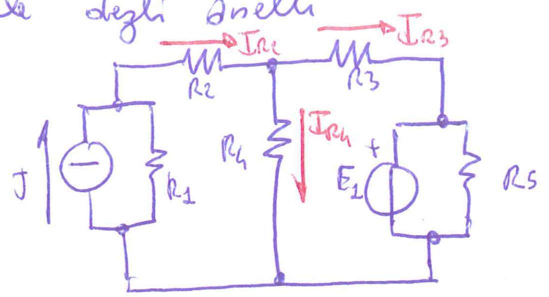
$$I_a = \frac{25 - 8{,}125}{45} = 0{,}375\,[A]$$

Le soluzioni ricavate sono $I_a = 0{,}375\ A$

$I_b = -0{,}8125\,A$

con le LKT e LKC ricavo tutti gli altri parametri

torno alla rete originale e verifico quali correnti sono coincidenti con quelle degli anelli



$$I_{R2} = I_A = 0{,}375\ A$$

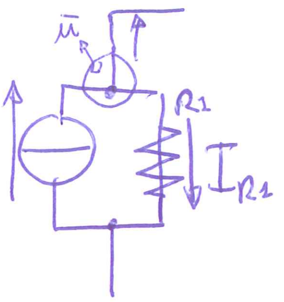
$$I_{R3} = I_B = -0{,}8125\ A$$

$$I_{R4} = I_A - I_B = 0{,}375 - (-0{,}8125) \overset{!}{=} 1{,}1875\,[A]$$

si trova così la $P_{R4} = I_{R4}^2 \cdot R_4 = 1,1875^2 \cdot 10 = 14,10\,[W]$

Per la P_J mi serve la V_J che la posso ricavare per definizione sui ragionamenti della R_1 in parallelo

trovo I_{R1} con LKC.



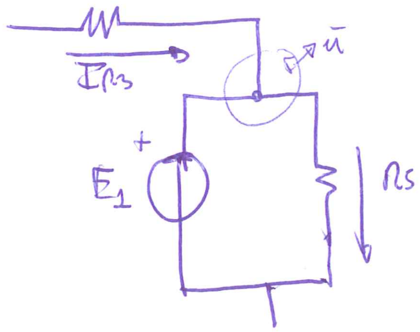
$$I_{R2} + I_{R1} - J = 0$$

$$I_{R1} = J - I_{R2} = 1_A - 0,375 = 0,625\,[A]$$

$$V_J = I_{R1} \cdot R_1 = 0,625 \cdot 25 = 15,625\ V$$

$$\boxed{P_J = V_J \cdot J = 15,625_V \cdot 1_A = 15,625\ W}$$

Su R_3 sta girando una corrente pari a I_{R3} in senso inverso al riferimento posto



su R_5 circola la corrente I_{R5} imposta dalla tensione in Parallelo

$$\frac{E_1}{R_5} = I_{R5} = \frac{20}{25} = 0,8\,A$$

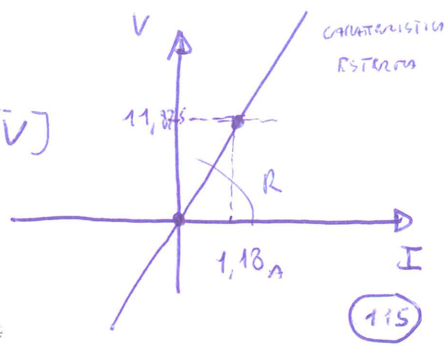
$$-I_{R3} + I_{R5} + I_{E1} = 0 \qquad \text{dal cui} \qquad I_{E1} = I_{R3} - I_{R5}$$

$$I_{E1} = -0,8125 - 0,8 = -1,6125\,A$$

$$P_{E1} = E_1 \cdot I_{E1} = 20 \cdot (-1,6125) = -32,25\ W$$

ovvero eroga una potenza negativa, quindi assorbe o dissipa 32,25 W

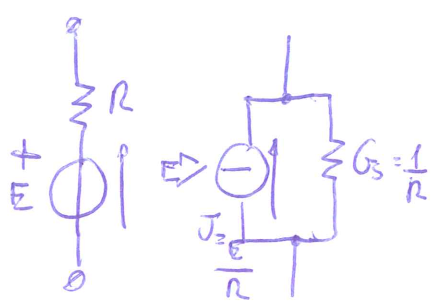
$$V_{R4} = I_{R4} \cdot R_4 = 1,1875 \cdot 10 = 11,875\,[V]$$



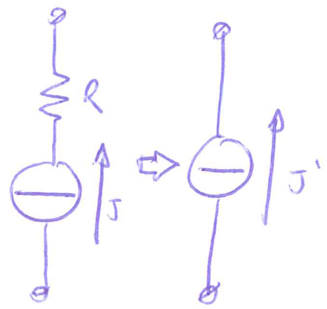
APPLICAZIONE DEL METODO DEI POTENZIALI NODALI

Adeguiamo la rete in modo che figurino solo generatori di corrente eventualmente usando i tre metodi di adeguamento particolare.

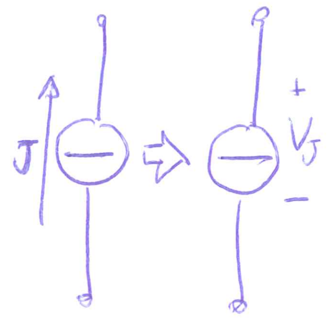
A tal proposito ricordiamo i tre casi particolari che si incontrano durante la fase di adeguamento della rete.



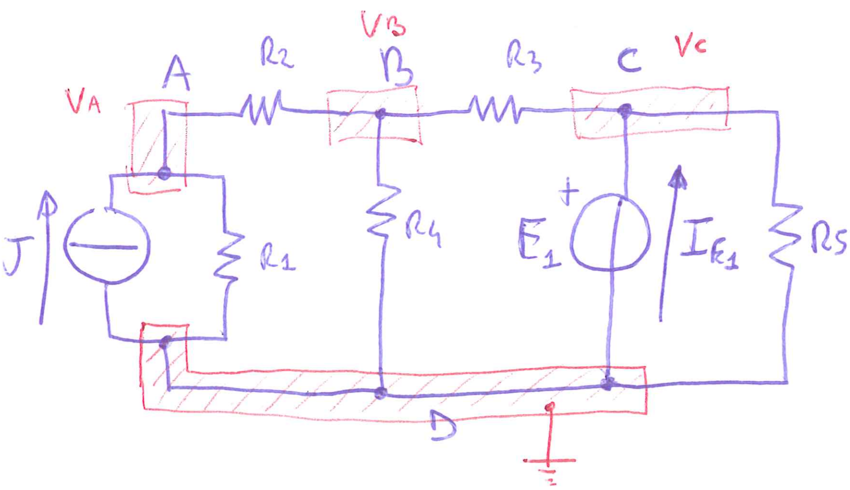
Trasformazione più naturale



La R è inutile nella rete adeguata



si deve presupporre che esista una tensione di capi di V_J e si aggiunge una equazione ausiliaria che deriva da LKC-LKT



Il lato in cui è inserito il generatore ideale di tensione non può essere sostituito e costituisce quindi un lato anomalo che introduce l'equazione ausiliaria $V_C = +E_1$ avendo posto il potenziale di D a massa (pari a zero). si presume I_{E_1} nel verso dei riferimenti

il sistema diventa:

$$\begin{cases} V_A\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}\right) - V_B\left(\frac{1}{R_2}\right) = +J \\ -V_A\left(\frac{1}{R_2}\right) + V_B\left(\frac{1}{R_2}+\frac{1}{R_4}+\frac{1}{R_3}\right) - V_C\left(\frac{1}{R_3}\right) = 0 \\ V_C\left(\frac{1}{R_3}+\frac{1}{R_5}\right) - V_B\left(\frac{1}{R_3}\right) = +I_{E_1} \\ V_C = +E_1 \end{cases}$$

(1)

NOTA: sulla calcolatrice digitare ad esempio $(25^{-1}+10^{-1}) \Rightarrow = \left(\frac{1}{25}+\frac{1}{10}\right)$ ma più rapido

$$\begin{cases} V_A\left(\frac{1}{25}+\frac{1}{10}\right)-V_B\left(\frac{1}{10}\right) = 1 \\ -V_A\left(\frac{1}{10}\right)+V_B\left(\frac{1}{10}+\frac{1}{10}+\frac{1}{10}\right)-V_C\left(\frac{1}{10}\right)=0 \\ 0 - V_B\left(\frac{1}{10}\right)+V_C\left(\frac{1}{10}+\frac{1}{10}\right)=+I_{E1} \end{cases}$$

$V_C = +20\ V$

$$\begin{cases} V_A\, 0{,}14 - V_B\, 0{,}1 - 0 = 1 \\ -V_A\, 0{,}1 + V_B\, 0{,}3 - V_C\, 0{,}1 = 0 \\ 0 - V_B\, 0{,}1 + V_C\, 0{,}2 = I_{E1} \end{cases}$$

Ricaviamo la matrice che deve rispettare la simmetria

$$\begin{bmatrix} 0{,}14 & -0{,}1 & -0 \\ -0{,}1 & 0{,}3 & -0{,}1 \\ 0 & -0{,}1 & 0{,}2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ I_{E1} \end{bmatrix}$$

Dal cui si ricavano i potenziali

$$\frac{(V_A - V_B)}{R_2} = I_{R2}$$

(1') $$\boxed{I_{E1} = \frac{V_B}{R_3} + E_1\left(\frac{1}{R_3}+\frac{1}{R_5}\right)}$$

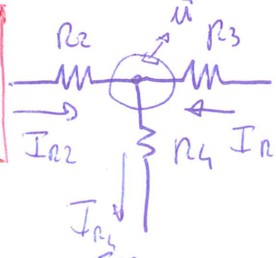
due di queste variabili sono però finte dato che la 4ª equazione fissa $V_C = +E_1$ si può definire $LKC' \rightarrow I_{R1} = I_{R5} + I_{R3}$

si ha quindi

$I_{E1} = -V_B\cdot 0{,}1 + 4$ ricavata da $\boxed{I_{E1} = -V_B\, 0{,}1 + 20\cdot 0{,}2}$

inseriamo l'equazione (1') nell'equazione (1)

$$\boxed{V_C\left(\frac{1}{R_3}+\frac{1}{R_5}\right)-V_B\left(\frac{1}{R_3}\right)=\frac{V_B}{R_3}+E_1\left(\frac{1}{R_3}+\frac{1}{R_5}\right)}$$

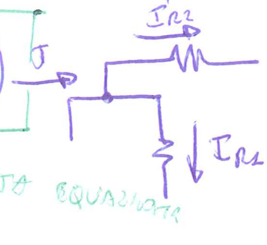


$LKC'' \rightarrow I_{R4} - I_{R2} - I_{R3} = 0$

$I_{R3} = 0{,}8125$ $I_{R3} = I_{R4} - I_{R2}$

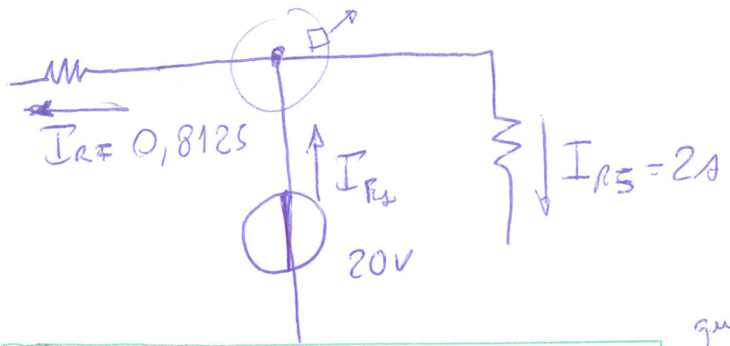
Ma $V_C = E_1$ come mostra la 4ª equazione quindi sostituiamo

$$\boxed{E_1\left(\frac{1}{R_3}+\frac{1}{R_5}\right)-V_B\frac{1}{R_3}=\frac{V_B}{R_3}+E_1\left(\frac{1}{R_3}+\frac{1}{R_5}\right)}$$



$LKC''' \quad I_{R2} = J - I_{R1}$

ORA FACCIAMO UN PO DI ORDINE IN QUESTA EQUAZIONE al nodo C si ha:



$$\boxed{I_{E1} = 2A + 0{,}8125\,A = 2{,}8125\,A}$$

quindi la matrice diventa

$$\begin{bmatrix} 0{,}14 & -0{,}1 & 0 \\ -0{,}1 & 0{,}3 & -0{,}1 \\ 0 & -0{,}1 & 0{,}2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2{,}8125 \end{bmatrix} \begin{array}{l} (\cdot 0{,}1) \\ (\cdot 0{,}14) \\ \text{ok} \end{array}$$

Risolviamo ora moltiplicando la prima riga per 0,1 e la seconda per 0,14 si ottiene

$$\begin{bmatrix} 0{,}014 & -0{,}01 & 0 \\ -0{,}014 & 0{,}042 & -0{,}014 \\ 0 & -0{,}1 & 0{,}2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0{,}1 \\ 0 \\ 2{,}8125 \end{bmatrix}$$

sommo alla seconda la prima ➡ ok

$$\begin{bmatrix} 0{,}014 & -0{,}01 & 0 \\ 0 & 0{,}032 & -0{,}014 \\ 0 & -0{,}1 & 0{,}2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0{,}1 \\ 0{,}1 \\ 2{,}8125 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \text{ok} \\ \cdot 0{,}1 \\ \cdot 0{,}032 \end{array}$$

ora si moltiplica la seconda per 0,1 e la terza per 0,032, la prima resta uguale.

$$\begin{bmatrix} 0{,}014 & -0{,}01 & 0 \\ 0 & 0{,}0032 & -0{,}0014 \\ 0 & -0{,}0032 & 0{,}0064 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0{,}1 \\ 0{,}01 \\ 0{,}09 \end{bmatrix}$$

sommo alla terza la seconda ➡

$$\begin{bmatrix} 0{,}014 & -0{,}01 & 0 \\ 0 & 0{,}0032 & -0{,}014 \\ 0 & 0 & +0{,}005 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0{,}1 \\ 0{,}01 \\ 0{,}1 \end{bmatrix}$$

$$V_c = \frac{0{,}1}{0{,}005} = 20\,[V] \qquad V_B = \frac{0{,}01 + 0{,}0014 \cdot 20}{0{,}0032} = +11{,}875\,(V)$$

quindi $V_a = \dfrac{0{,}1 + \overset{11,875}{V_B} \cdot 0{,}01}{0{,}014} = 15{,}625\,[V]$

Dato che V_B è la tensione applicata a R_4 la potenza è subito definita nota la corrente $I_{R4} = \dfrac{V_{R4}}{R_4} = \dfrac{11{,}875}{10} = 1{,}1875$ $\quad P_{R4} = R_4 I_{R4}^2 = 10 \cdot 1{,}1875^2 = 14{,}10\,[W]$

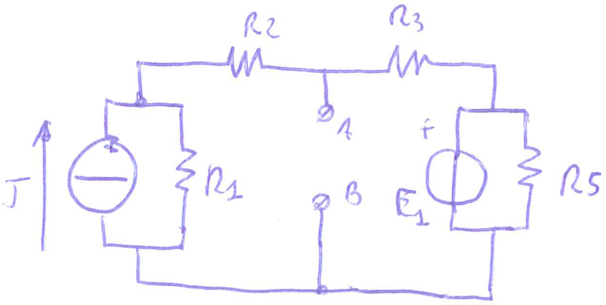
$P_J = \overset{=V_a}{V_J} \cdot J = 15{,}625 \cdot 1 = 15{,}625\,W \qquad P_{E1} = E_1 \cdot I_{E1} = 20 \cdot 2{,}8125 = 56{,}25\,W$

RIASSUMENDO I RISULTATI

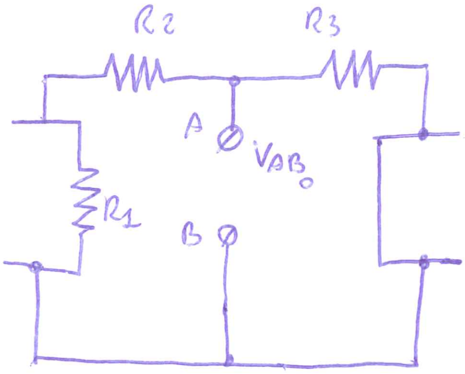
$P_J = 15{,}625\,W \quad P_{E1} = 56{,}25\,W \quad P_{R4} = 14{,}10\,W$

Procediamo applicando il teorema di Thevenin.

Stacco il carico e creo la porta A-B

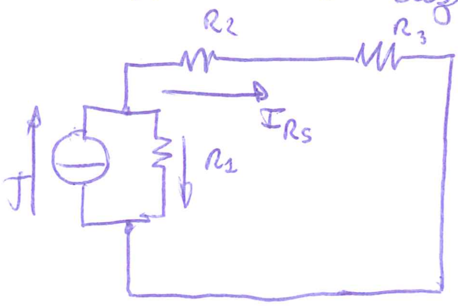


Ricavo la rete passiva spegnendo tutti i generatori e successivamente calcolo la Req vista dalla porta AB ovvero la Req_{AB}



$$Req_{AB} = \frac{(R_2+R_1)\cdot R_3}{(R_2+R_1)+R_3} = \frac{350}{45} = 7{,}77\ \Omega$$

Poi trovo $V_{AB_0} = V_{th_{AB}}$ applicando il principio di sovrapposizione degli effetti.



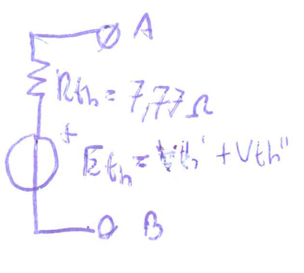
$$I_{R5} = \frac{J}{(R_2+R_3)+R_1}\cdot R_1 = \frac{1\cdot 25}{45} = 0{,}555\ A$$

$V_{AB_0}' = V_{th_{AB}}' = V_{R3}'$ per definizione di parallelo

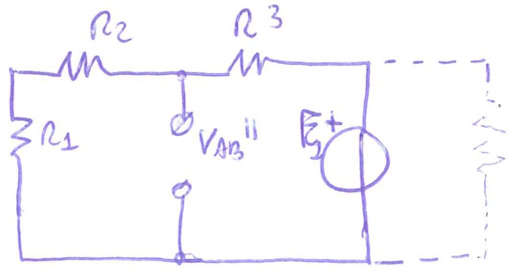
Per la legge di Ohm si ha $I_{R5}\cdot R_3 = V_{AB}' = V_{th}' = 0{,}555\cdot 10 = 5{,}55\ V$

$V_{th}' = 5{,}55$ volt

quindi il generatore reale equivalente di thevenin alla porta AB è dato da $R_{th} = 7{,}77\ \Omega$ e $E_{th} = V_{th}' + V_{th}''$



Faccio agire il solo generatore ideale di tensione



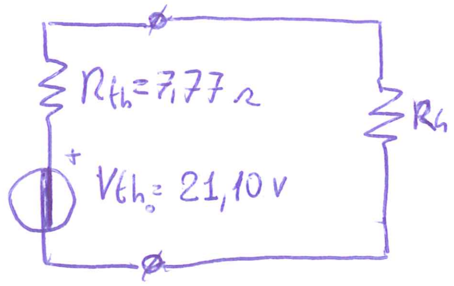
Per trovare V_{AB}'' applico il partitore di tensione

$$V_{AB}'' = \frac{E_1}{R_3+(R_2+R_1)}(R_2+R_1) = \frac{20}{45}\cdot 35 = \frac{350}{45} = 15,55\,V$$

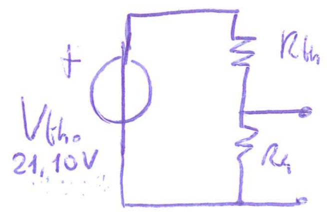
$$V_{AB_0} = V_{AB}' + V_{AB}'' = 5,55 + 15,55 = 21,10\,V$$

$$V_{th} = V_{AB_0} = 21,10\,V$$

Poi si riapplica il carico



e calcolo il partitore di tensione per trovare la V_{R_4}, la I_{R_4},



$$V_{R_4} = \frac{V_{th_0}}{R_{th}+R_4}\cdot R_4$$

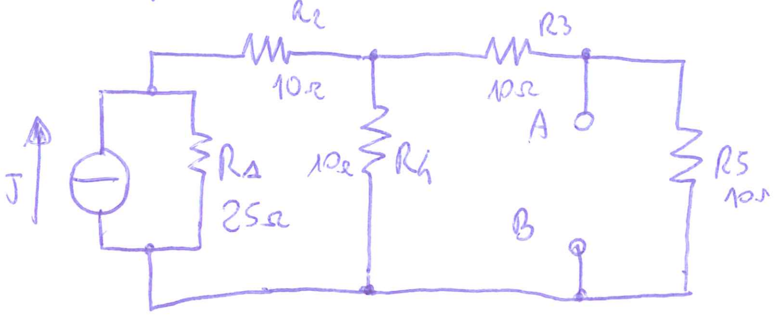
$$\boxed{V_{R_4} = \frac{21,10}{7,77+10}\cdot 10 = 11.87\,V}$$

studiamo la maglia con il carico R_4 riconnesso alla porta AB trovo I_{R_4}

$$\boxed{I_{R_4} = \frac{V_{R_4}}{R_4} = \frac{11.87}{10} = 1,187\,A}$$

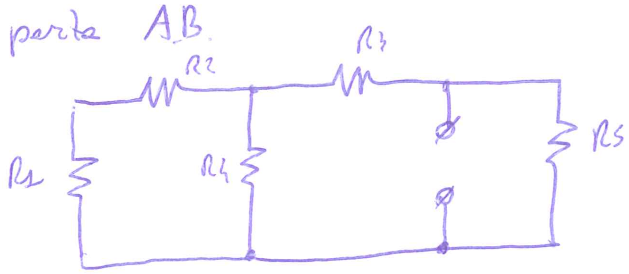
$$P_{R_4} = R_4 \cdot I_{R_4}^2 = 10\cdot 1,187^2 = 14,08\ \text{Watt}$$

Applico thevenin al generatore di tensione E_1 ovvero sposto la porta AB ai capi del generatore E_1. Stacco questo carico e ricalcolo tutto compreso la R_{eq} dato che cambiando porta risulta diversa da quella calcolata quando la porta era ai capi di R_4.



Rete a cui applico thevenin con la nuova porta A-B

Rendo passiva la rete e trovo la nuova R_{eq} visto dalla nuova porta AB.



$(R_2 + R_1) // R_4 + R_3 = R_{eq}$ sinistra

$R_5 = R_{eq}$ destra

$R_{eq} = R_{eq}$ sinistra $// R_{eq}$ destra

Procediamo con i semplici calcoli

$R_2 + R_1 = 35$

$35 // R_4 = \frac{35 \cdot 10}{45} = \frac{350}{45} = 7{,}77\ \Omega$

a cui si somma R_3 per ricavare R_{eq} sinistra

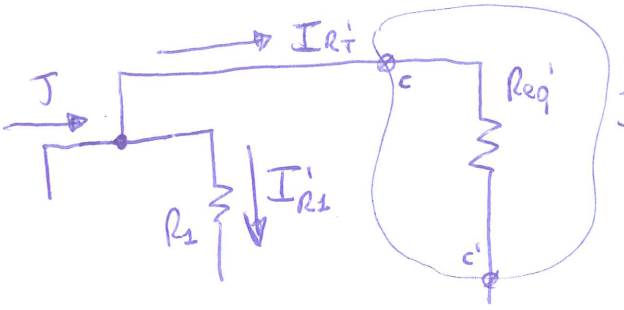
R_{eq} sinistra $= 7{,}77 + R_3 = 17{,}777$

$R_{eq} = 17{,}777 // R_5 = \frac{17{,}777 \cdot 10}{27{,}777} = 6{,}399\ \Omega$

$\boxed{R_{eq} = 6{,}399\ \Omega}$

Il generatore di tensione a vuoto secondo thevenin lo troviamo con il principio di sovrapposizione degli effetti.

V_{th}' = tensione ai capi di R_5 (per definizione di parallelo) quindi ricavo I_{R5}' applicando i partitori di corrente necessari.



$I'_{RT} =$

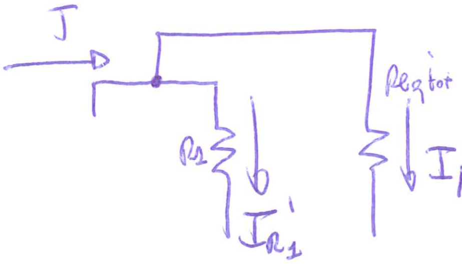
Req' = Resistenza equivalente di tutta la rete vista alla porta c-c' escluso ciò che è fuori dall'insieme di taglio indicato.

$$Req' = \left[(R_3 + R_5) // R_4\right] + R_2$$

sostituendo i valori e calcolando, si ha:

$$Req' = \frac{(R_3+R_5)\cdot R_4}{R_3+R_5+R_4} + R_2 = \frac{20\cdot 10}{30} + 10 = \frac{20\cancel{0}}{3\cancel{0}} + 10 = 16{,}66\,\Omega$$

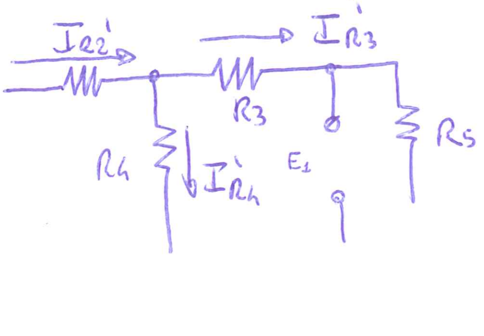
quindi il primo partitore di corrente diventa:



$I_{Req'} = I'_{RT} = I'_{R2}$ ← Per definizione di bipoli in serie

$$I_{Req} = \frac{J}{R_1 + Req'_{tot}} \cdot R_1 = \frac{1\cdot 25}{25 + 16{,}66} = 0{,}6\,A$$

Applichiamo un secondo partitore



$$I'_{R3} = I'_{R5} = \frac{I'_{R2}}{R_4 + (R_3+R_5)} \cdot R_4 = \frac{0{,}6\cdot 10}{30}$$

$$= 0{,}2\,A$$

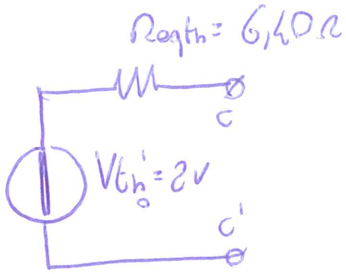
$$I'_{R5} = I'_{R3} = 0{,}2\,A$$

Per definizione di parallelo di bipoli il primo contributo per trovare la tensione a vuoto alla porta lo trovo con la legge di Ω

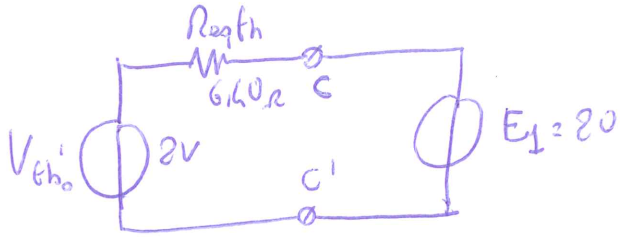
$$\boxed{V'_{th_{E_1}} = I'_{R5} \cdot R_5 = 0{,}2 \cdot 10 = 0{,}2A \cdot 10\,\Omega = 2\ \text{Volt}}$$

Il generatore equivalente secondo thevenin trovato in questo caso è pari a 2V, quindi è il valore che leggerei a vuoto in parallelo alla resistenza R5 con il generatore E_1 scollegato.

Il circuito equivalente è quindi:

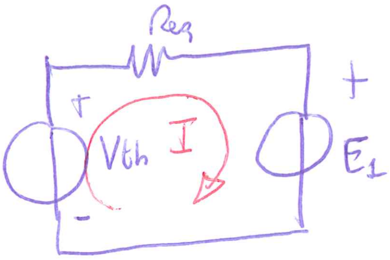


a questo ricollego il carico costituito dal solo generatore ideale di tensione E_1



vediamo lo scambio di potenza in questa situazione.

oriento la maglia del circuito equivalente di thevenin e scrivo la LKT.



$$I\,R_{eq} + E_1 - V_{th} = 0$$

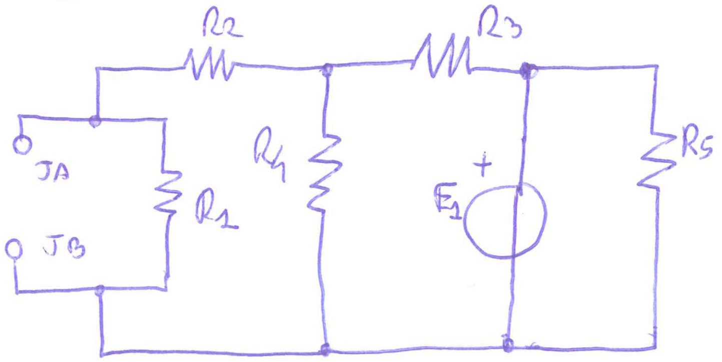
$$I = \frac{V_{th} - E_1}{R_{eq}} = \frac{2 - 20}{6{,}40} = -2{,}81\,A$$

Questa corrente sta attraversando il generatore E_1 nelle normali condizioni di funzionamento, quindi la potenza scambiata da questo generatore è:

$$P_{E_1} = I \cdot E_1 = -2{,}81 \cdot 20 = -56{,}25$$

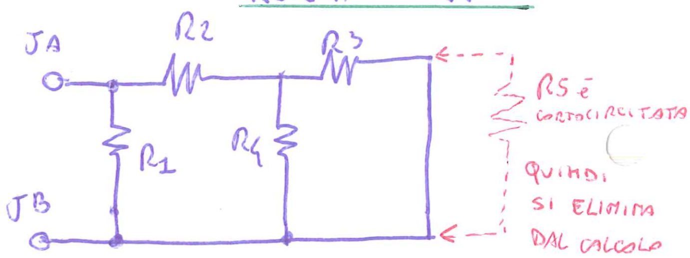
ovvero il generatore assorbe potenza dalla rete e non la fornisce come si poteva pensare all'inizio.

Per finire applichiamo thevenin alla porta JA - JB, ovvero stacchiamo il generatore di corrente



Ricalcoliamo la Req della rete passiva, si deve ricalcolare ogni volta che si cambia porta.

$$Req_{JAJB} = [(R3 // R4) + R2] // R1$$

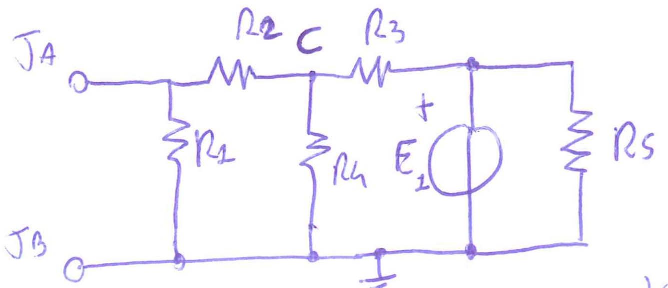


Sostituendo i valori, e i risultati ovvi che si ottengono parallelando bipoli resistori uguali si ha:

$$Req_{JAJB} = (5 + 10) // 25 = \frac{15 \cdot 25}{40} = 9,375 \, \Omega$$

$$\boxed{Req_{JAB} = 9,375 \, \Omega}$$

adesso facciamo agire il solo generatore E1. In effetti stiamo applicando una forma degenere del P.S.E dato che agisce un solo generatore.



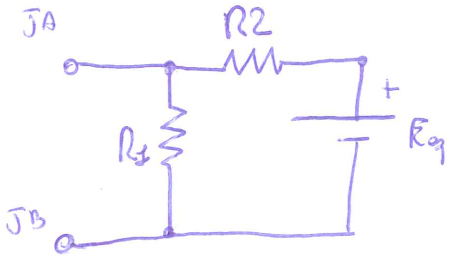
La maglia di R5 è indipendente quindi non la considero

Applico in successione dei partitori di tensione trovo per prima la tensione al nodo C rispetto al ritorno comune

$$V_{CM} = \frac{E_1}{R_3 + [R_4 // (R_2 + R_1)]} \cdot R_4 // (R_2 + R_1) = \frac{20}{10 + \left(\frac{350}{45}\right)} \cdot \left(\frac{350}{45}\right) = \frac{155,555}{17,7777} =$$

$$V_{CM} = 8,75 [V]$$

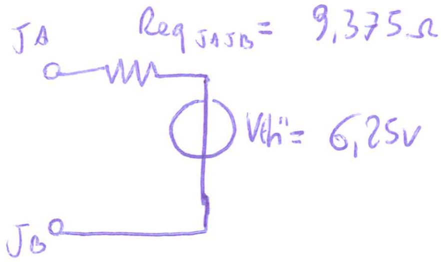
Supponiamo ora che al nodo "C" stia soggetto alla tensione del generatore fittizio appena calcolato.
Otteniamo un nuovo partitore fatto come in figura



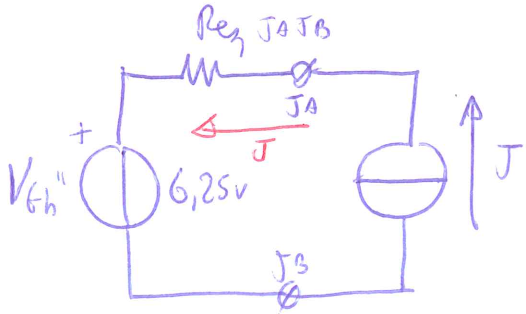
Il simbolo usato è quello di una batteria a un elemento e non sarebbe quello più indicato.
Lo usiamo solo per distinguere.

$$V_{JAB} = V''_{th} = \frac{V_{CM}}{R_2 + R_1} \cdot R_1 = \frac{8{,}75}{10+25} \cdot 25 = 6{,}25V$$

questa è la tensione di capi del generatore di corrente J con questo scomnesso. Abbiamo il generatore equivalente di thevenin



ora passiamo alla porta JA e JB la corrente impressa J1, ovvero ricolleghiamo ciò che costituisce il carico della rete equivalente di thevenin



dato che stiamo collegando un generatore di corrente, la maglia deve essere attraversata da questa.

$$J \cdot Req_{JAJB} + V_{th} = V_J$$

$$(1 \cdot 9{,}375)_V + 6{,}25_V = V_J$$

$$V_J = 15{,}625\ v$$

$$\boxed{P_J = J \cdot V_J = 1_A \cdot 15{,}625_V = 15{,}625\ W \text{ erogati}}$$

Fine dimostrazione usando il teorema di thevenin.

SOLUZIONE TRAMITE IL TEOREMA DI NORTON

In una rete lineare, per quanto complessa, l'analisi ad una sua porta AB definisce l'equivalenza con un generatore normale di corrente impressa J_{eq} pari alla corrente che fluirebbe ai morsetti AB posti in corto circuito, con la conduttanza del generatore normale G_{eq} pari alla conduttanza interna della rete vista dagli stessi morsetti AB dopo aver resa passiva la rete stessa.

La conduttanza G_{eq}, detta anche conduttanza interna della rete, alla porta specificata è anche pari al rapporto della corrente di corto circuito I_{cc} e la tensione a vuoto che si avrebbe secondo thevenin alla stessa porta AB.

ne consegue che valgono le relazioni

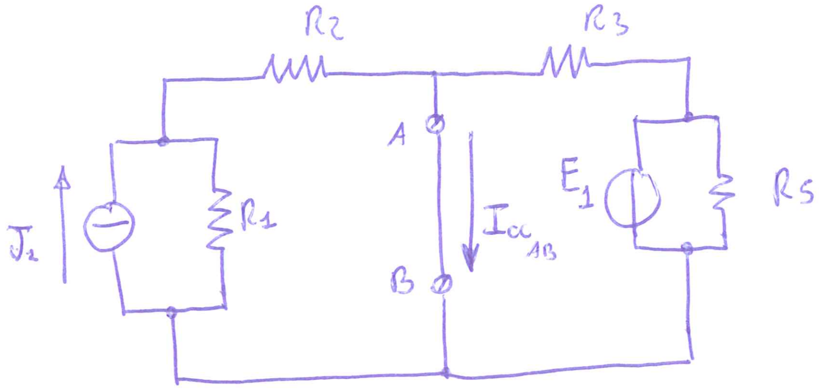
1) $J_{eq} = I_{cc}$ alla porta AB

2) $G_{eq} = G_{int} = \dfrac{I_{cc}}{V_0}$ alla porta AB

Da quanto detto si deduce che non è sempre possibile applicare il teorema di NORTON, ma solo in quei casi in cui sia possibile cortocircuitare i morsetti AB della porta considerata.
Dato che non è possibile mettere in parallelo il bipolo corto circuito perfetto con il bipolo generatore ideale di tensione NE CONSEGUE CHE non esiste la rete equivalente di Norton applicata al generatore ideale di tensione.
Sotto certe condizioni il teorema di Norton si può applicare alle reti simboliche (ovvero in sinusoidale).

ATTENZIONE non è possibile spegnere durante il calcolo i generatori controllati

Procediamo mettendo in corto circuito i morsetti A-B della rete dato che non ci sono problemi ad applicare Norton in questa porta. NON SARÀ POSSIBILE APPLICARLO CONSIDERANDO LA PORTA A'B' ai capi di R5 per la ragione detta prima, ovvero corto circuito del generatore ideale di tensione.

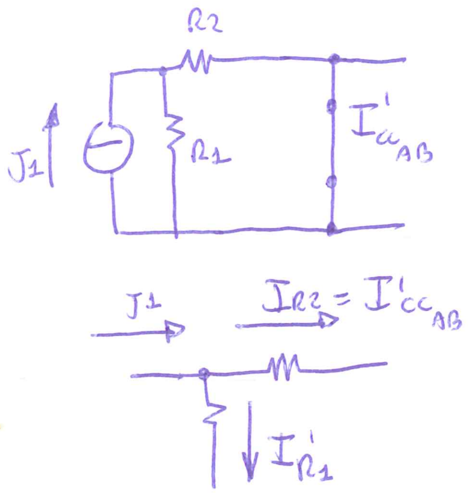


La $I_{cc_{AB}}$ la posso ricavare applicando i P.S.E

1) faccio agire solo J_1

2) faccio agire solo E_1

AZIONE DI SOLO J_1



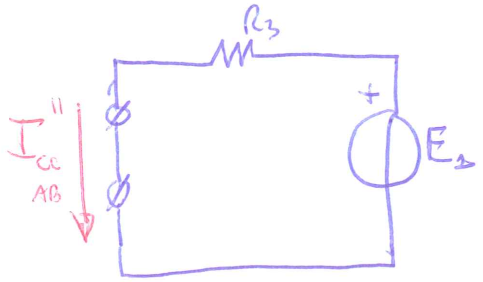
si nota che la parte di destra della rete risulta indipendente dato che si trova comunque in parallelo a un corto circuito.

La $I'_{cc_{AB}}$ è quindi ricavabile direttamente con l'applicazione di un solo partitore di corrente

$$I_{R2} = \frac{J_1}{R_2 + R_1} \cdot R_1 = \frac{1 \cdot 25}{35} = 0{,}71\,A$$

$$I'_{cc_{AB}} = 0{,}71\,A$$

Adesso vediamo il contributo di E_1 spegnendo J_1.. Il circuito diventa



L'anello di R5 è indipendente quindi non si considera.

La $I''_{cc_{AB}}$ si trova in questo circuito con la sola legge di Ohm

$$I''_{cc} = \frac{E_1}{R_3} = \frac{20}{10} = 2\,A$$

La totale corrente di corto circuito alla porta è quindi

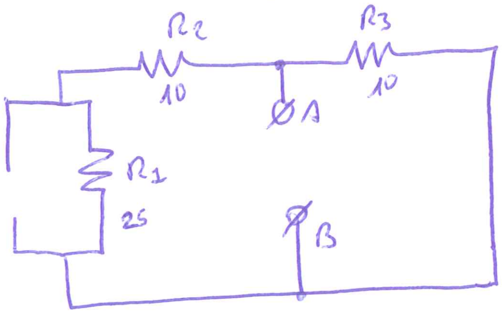
$$I_{cc_{AB}} = I'_{cc_{AB}} + I''_{cc_{AB}} = 2{,}71\ A$$

Ora si rende la rete passiva e si calcola la R_{eq} dato che vale

$G_{AB} = \frac{1}{R_{eq_{AB}}}$

INSISTIAMO SUL CONCETTO CHE LA R interna e quindi la $G = \frac{1}{R}$ è dipendente dalla porta in cui la si valuta.

Riapriamo i morsetti AB posti precedentemente in C.C. e annulliamo i generatori (togliamo i cerchietti)



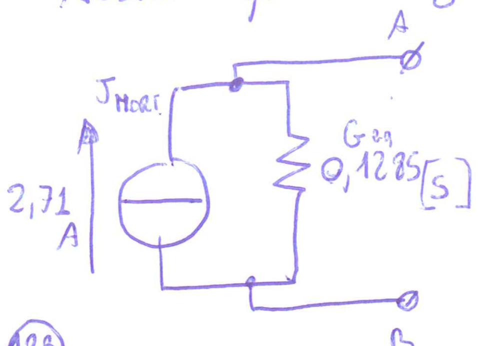
Ancora una volta la resistenza R5 risulta ininfluente perché in parallelo a un bipolo corto circuito ideale

$$R_{eq_{AB}} = (R_2 + R_1) \,//\, R_3 = \frac{(R_1+R_2)\cdot R_3}{(R_1+R_2)+R_3} = \frac{1}{\frac{1}{35}+\frac{1}{10}} = 7{,}77\ \Omega$$

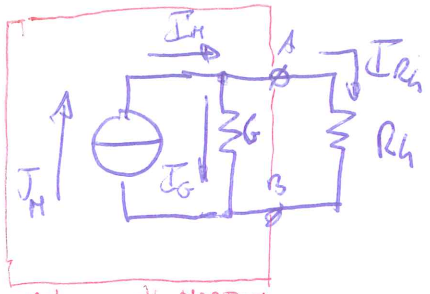
$G = \frac{1}{R_{eq_{AB}}} = 0{,}1285\ [S]$

Con la calcolatrice il calcolo rapido può essere effettuato con la sequenza $1 \div (R_A^{-1} + R_B^{-1}) =$ dove $^{-1}$ si ottiene premendo in sequenza i tasti $\boxed{y^x}$ poi $\boxed{+/-}$ poi 1 che equivale a scrivere $\frac{1}{R_A}$.

Abbiamo quindi il generatore equivalente di Norton



ora possiamo ricollegare il carico e verificare se la porzione di corrente sul carico da luogo alle stesse dissipazioni trovate prima con il teorema di Thevenin



Rete equi di NORTON

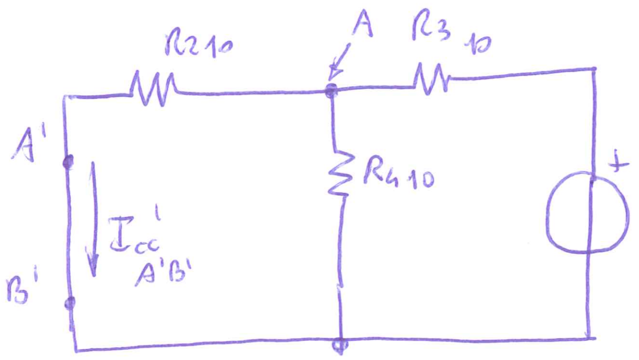
$$\boxed{I_{R_4} = \frac{I_N}{\frac{1}{G} + R_4} \cdot \frac{1}{G}}$$

$$I_{R_4} = \frac{2,71}{7,77+10} \cdot 7,77 = \frac{21,05}{17,77} = 1,184\ A$$

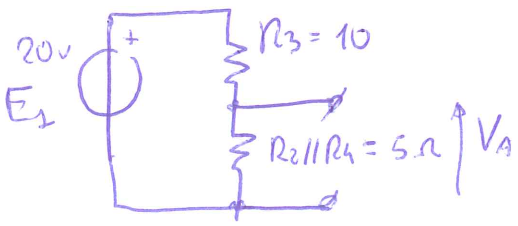
$$\boxed{P_{R_4} = R_4 I_{R_4}^2 = 14,01\ [W]}$$

Ora cerchiamo la potenza fornita dal generatore di corrente applicando la nuova porta A'B' ai suoi capi.
L'applicazione del teorema di Norton impone che questa porta, ovvero il generatore, sia messa in corto.

Si ottiene la seguente rete:



Per trovare la $I'_{cc\,A'B'}$ è sufficiente trovare, usando il partitore di tensione resistivo, il potenziale del nodo A e applicare la legge di Ohm.

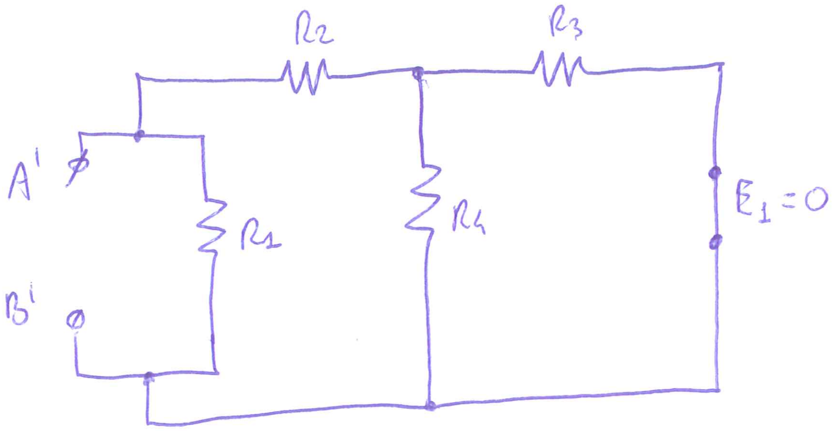


$$V_A' = \frac{E_1}{R_3 + (R_2 // R_4)} (R_2 // R_4) = \frac{20}{10+5} \cdot 5 = 6,66\ V$$

$$I_{R_2} = \frac{V_A'}{R_2} = \frac{6,66}{10} = 0,666\ [A] = I'_{cc\,NORTON}$$

$$\boxed{I'_{cc\,NORTON} = 0,666\ A}$$

Poi si cerca la nuova $R_{eq} = \frac{1}{G_{eq}}$ che risulterà diversa dalla precedente perché valutata a una nuova porta.



Ricompare la R_1 che non è più in c.c. come nel ragionamento precedente.

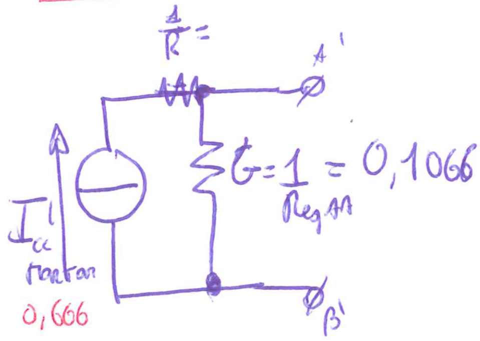
Ancora la R5 si trova cortocircuitata e quindi si esclude

$$Req_{A'B'} = [(R_3 // R_4)] // (R_2] + R_1) \qquad R_3 // R_4 = 5\,\Omega$$

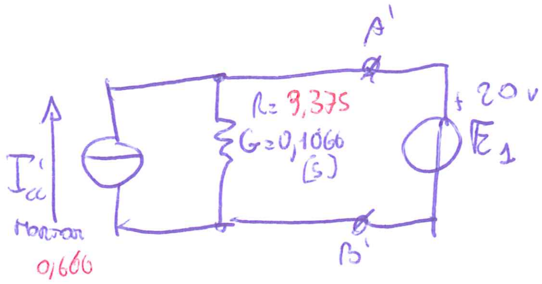
$$= (5 + 10) // 25 = \frac{15 \cdot 25}{40} = 9{,}375\,\Omega$$

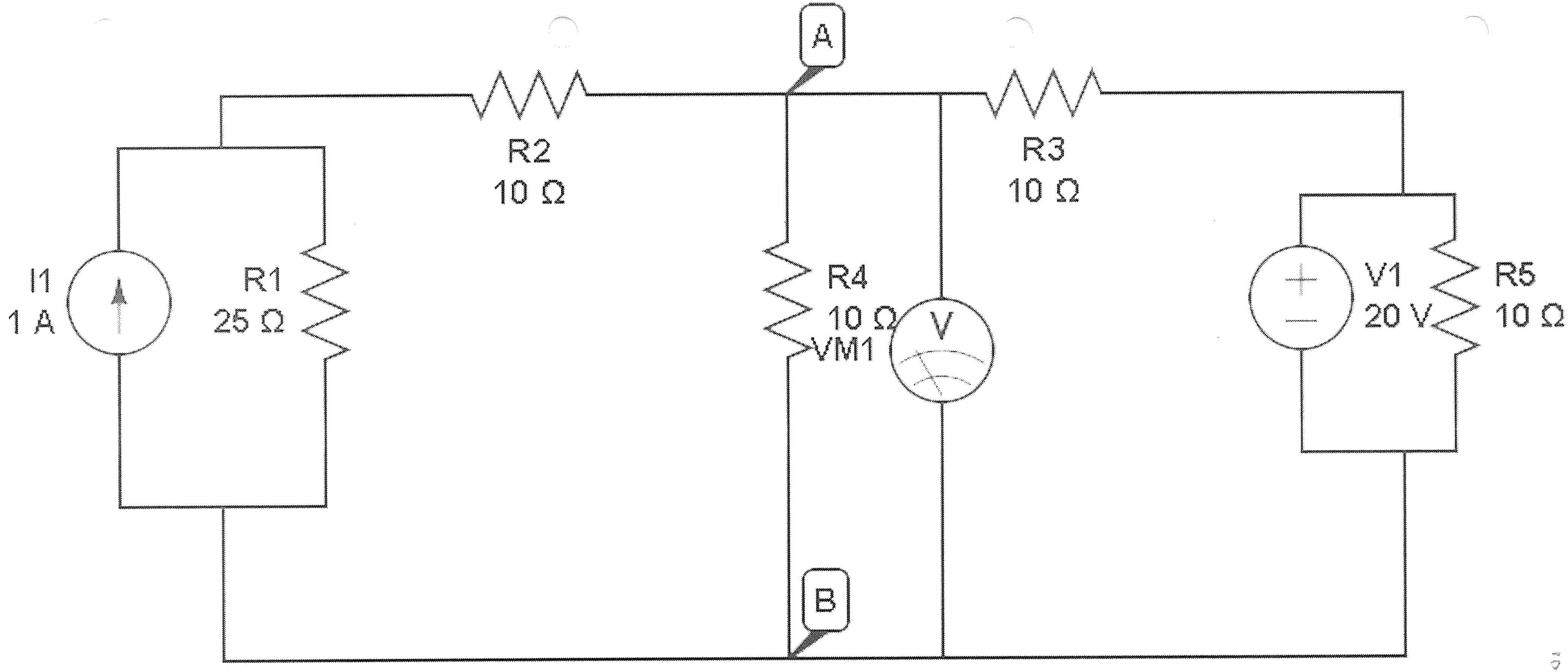
$\boxed{Req_{A'B'} = 9{,}375}$ $\boxed{I'_{cc\,\text{Norton}} = 0{,}666}$

Abbiamo il nuovo generatore reale di corrente di Norton valutato alla porta A'B'



ricollego il carico e valuto la corrente su di esso per poi valutarne la potenza scambiata.





ing. Marco Gottardo esercizio 31 Marzo 2012 per studenti ALSI

risolvere trovando la VR4,IR4,PR4 e le potenze dei generatori usando:

1) Applicando il PSE

2) applicando il metodo delle correnti di anello

3)applicando il metodo dei potenziali ai nodi

4)applicando il teorema di thevenin

5)applicando il teorema di Norton

6) Verificare come ultimo esercizio il teorema di Tellegen

CIRCUITO DISEGNATO CON CIRCUITLAB DA MARCO GOTTARDO 31/03/2012
ID UTENTE CIRCUITLAB: ad.noctis

SOLUZIONI RILEVATE AL CALCOLATORE CON CIRCUITLAB.

$V_A = V_{R4} = 11,87\ V$

$V_J = 15,62\ V$

$P_{E1} = 56,25\ W$

$P_{J1} = 15,62\ W$

$P_{R4} = 14,10\ W$

$P_{R1} = 9,766\ W$

$P_{R2} = 1,406\ W$

$P_{R3} = 6,602\ W$

$P_{R5} = 40,00\ W$

$P_{Rtot} = 71,892\ W$

$P_{GENERATORI}$ = P_{E1} 56,25

P_{J1} 15,62

$P_{GTOT} = 71,87$

A MENO DI ARROTONDAMENTI ALLA SECONDA CIFRA DECIMALE È VERIFICATO IL TEOREMA DI TELLEGEN DATO CHE LA POTENZA SCAMBIATA TOTALE TRA I GENERATORI E GLI UTILIZZATORI RISULTA PARI A ZERO

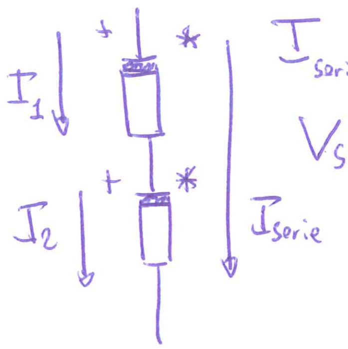
$$P_{RTOT} = P_{GTOT} = 71,8 \text{ WATT}$$

$$\sum_i \pm P_i = 0$$

Lez. n° 15   ing. Valentina Siena

Esercizi sui bipoli con le caratteristiche.

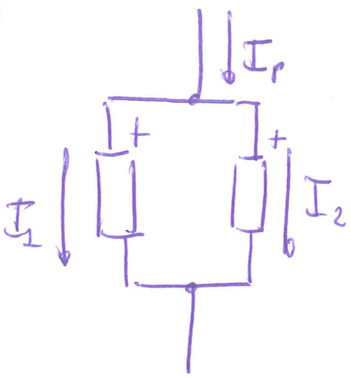
Vediamo uno schemino riassuntivo



$I_{serie} = I_1 = I_2$

$V_S = V_1 + V_2$

si sommano le tensioni a parità di corrente

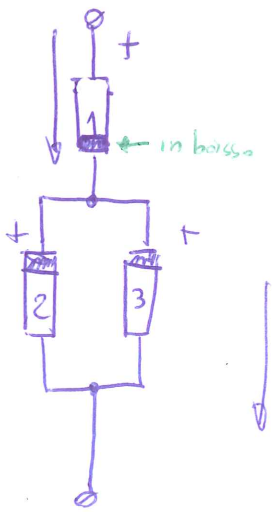


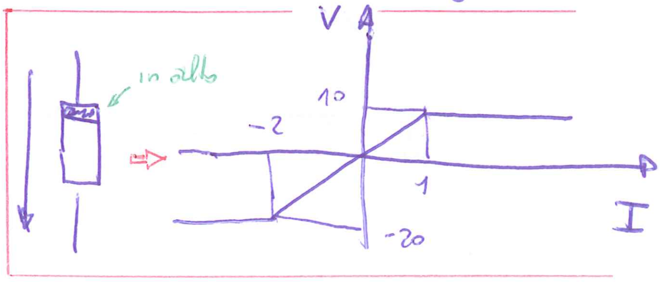
$I_p = I_1 + I_2$

$V_p = V_1 = V_2$

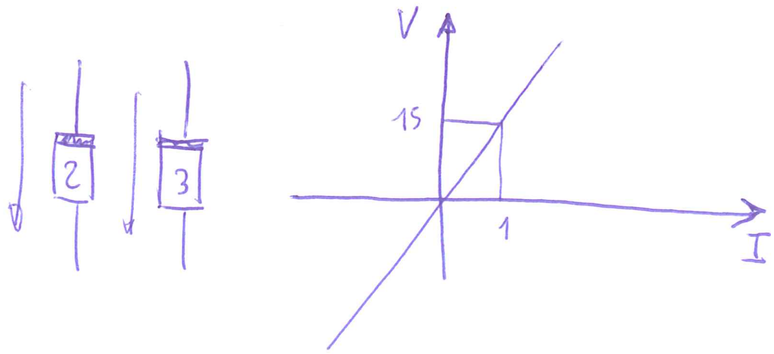
si sommano le correnti a parità di tensione

Vediamo la sintesi delle due configurazioni

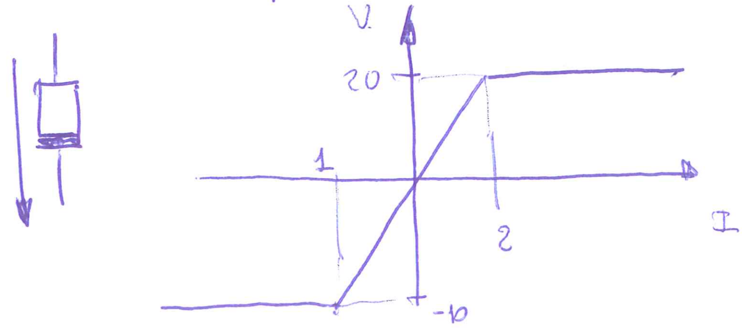


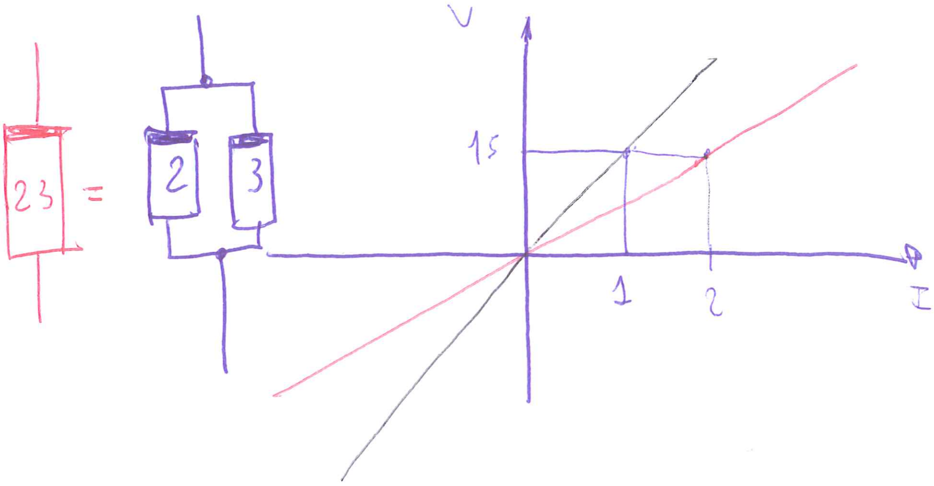


questo è il grafico della caratteristica esterna con il riferimento del bipolo verso l'alto (quindi nella sintesi si rovesciano entrambi gli assi)

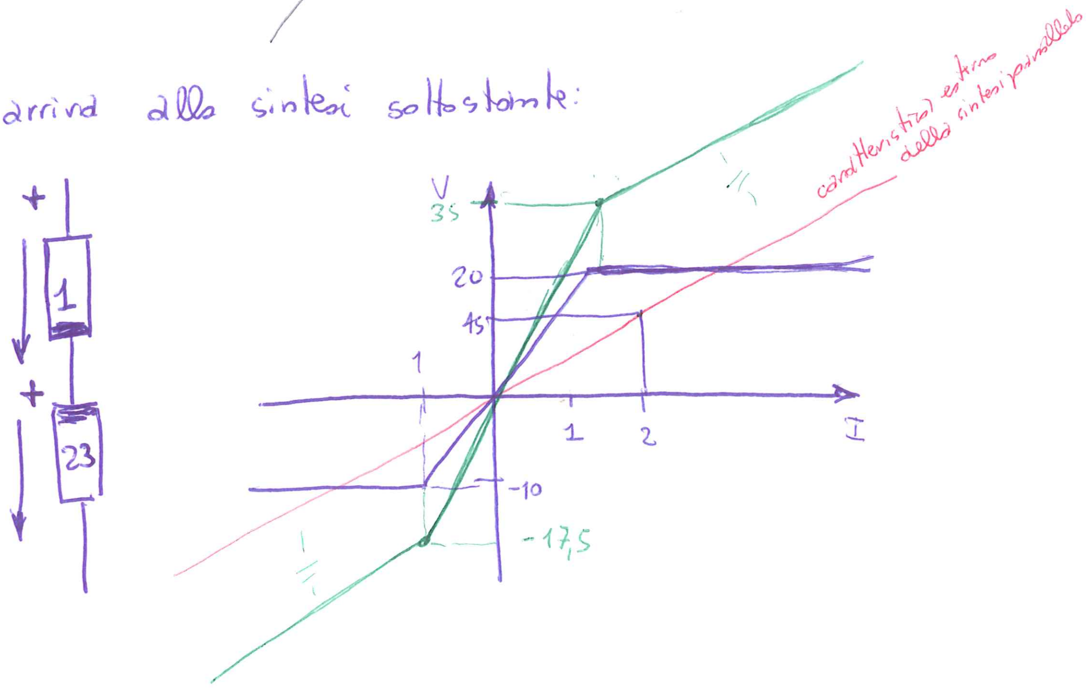


se rovescio la prima caratteristica (bipolo 1) ottengo

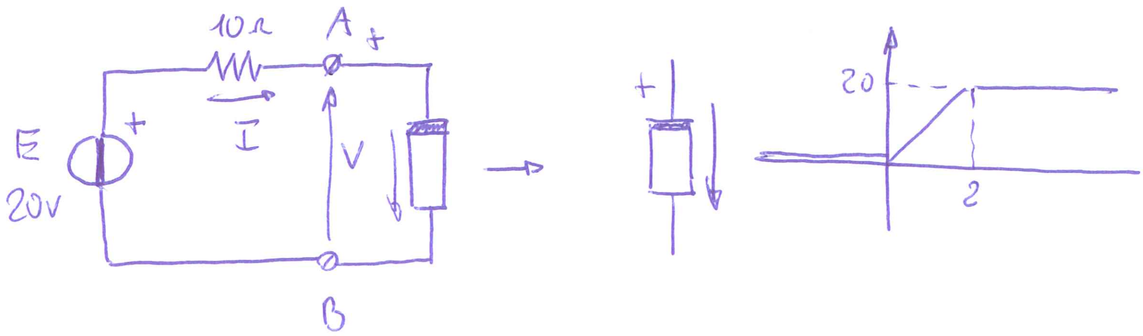




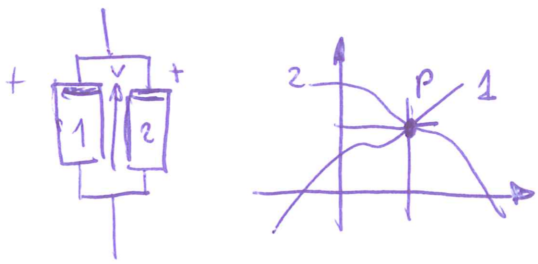
si arriva alla sintesi sottostante:



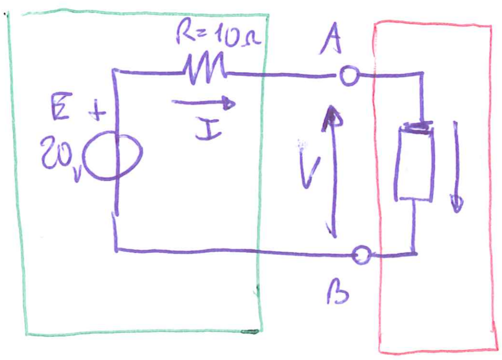
Vediamo un altro esercizio: ricavare il punto di lavoro di questo bipolo



Si ricorda che se ho due bipoli in parallelo il punto di lavoro è dato dall'intersezione delle due caratteristiche esterne, ad esempio

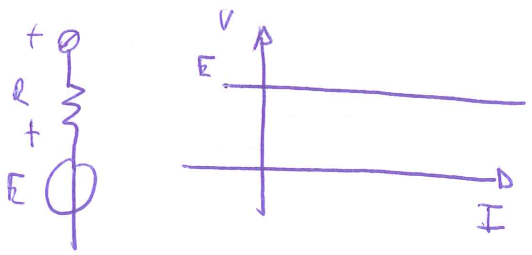


Agiamo nella stessa maniera nel nostro esercizio

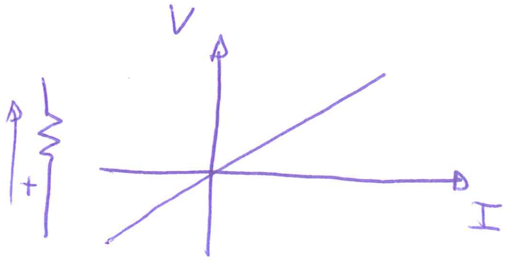


Bipolo rosso (resistenza)

Bipolo verde (generatore reale di tensione)

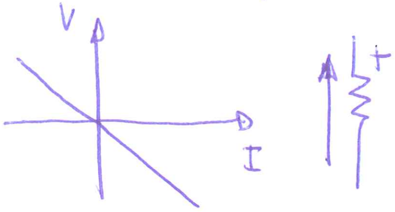


caratteristica standard

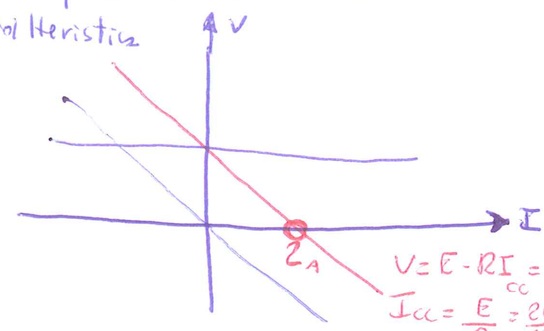


caratteristica standard

Dalle caratteristiche standard otteniamo le "applicate" alla rete introducendo i riferimenti reali, ad esempio la Resistenza R va invertita.



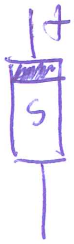
Il bipolo serie invece ha la seguente caratteristica

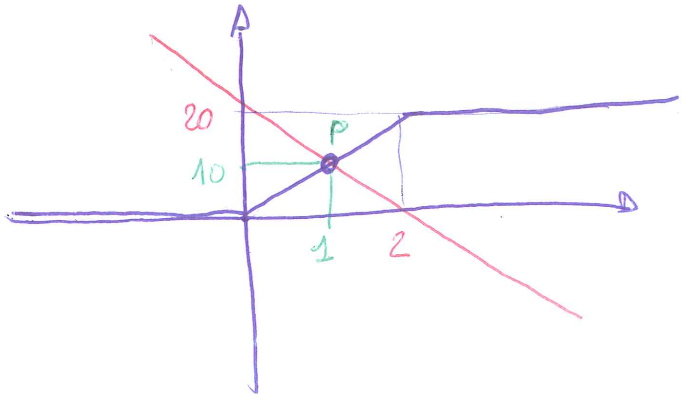


$V = E - RI_{cc} = 0$

$I_{cc} = \frac{E}{R} = \frac{20}{10} = 2$

vediamo il bipolo serie, sovrapponiamo le due caratteristiche

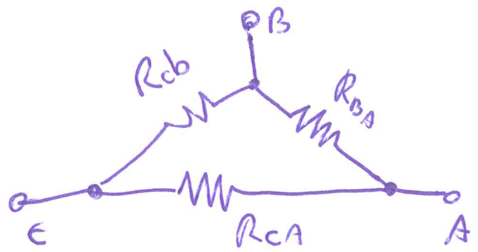


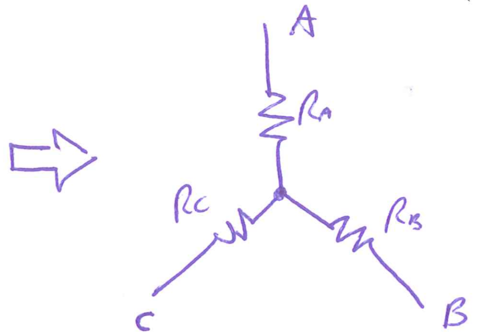


$P = (10V, 1A)$

Vediamo le trasformazioni stella triangolo e triangolo stella

dette anche $\Delta \to \lambda$ e $\lambda \to \Delta$





cominciamo con

$\Delta \to \lambda$

sommiamo le resistenze, e useremo questo valore come denominatore nelle formule

$$\boxed{R_0 = R_{AB} + R_{CA} + R_{CB}}$$

$$R_A = \frac{R_{AB} \cdot R_{CA}}{R_0}$$

$$R_B = \frac{R_{Cb} \cdot R_{BA}}{R_0}$$

$$R_C = \frac{R_{Cb} \cdot R_{CA}}{R_0}$$

Le formule per passare dalla stella al triangolo sono invece

$\lambda \rightarrow \Delta$ dobbiamo calcolare la conduttanza G_0 come somma delle conduttanze

$$\boxed{G_0 = \frac{1}{R_A} + \frac{1}{R_B} + \frac{1}{R_C}}$$

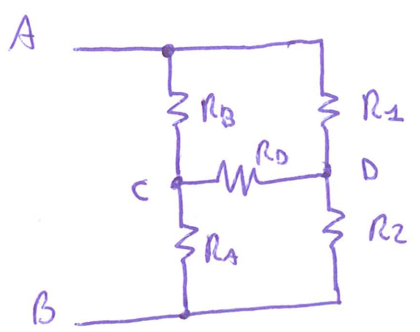
$$R_{AB} = R_A R_B G_0$$

$$R_{BC} = R_B R_C G_0$$

$$R_{CA} = R_C R_A G_0$$

Esercizio

La seguente rete contiene due triangoli. Dopo averne convertito 1 in stella si può procedere con il solito serie e parallelo



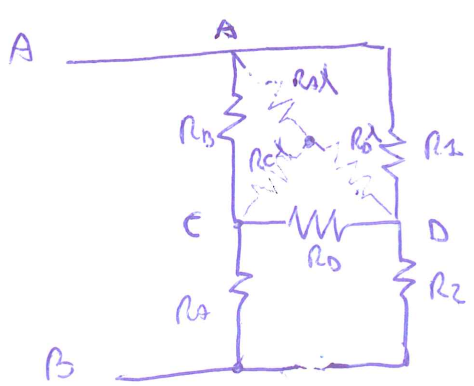
$R_C = R_A = 100\ \Omega$

$R_B = 200\ \Omega$

$R_1 = 100\ \Omega$

$R_2 = 200\ \Omega$

Se converto il triangolo superiore ottengo:

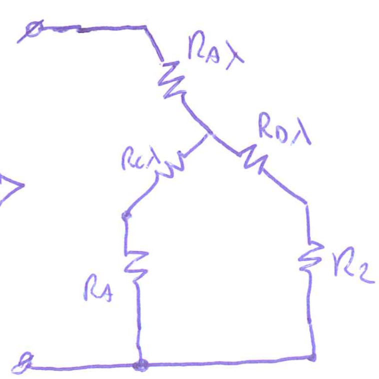


$$R_{A\lambda} = \frac{R_B \cdot R_1}{R_B + R_D + R_1}$$

$$R_{C\lambda} = \frac{R_B \cdot R_D}{R_B + R_D + R_1}$$

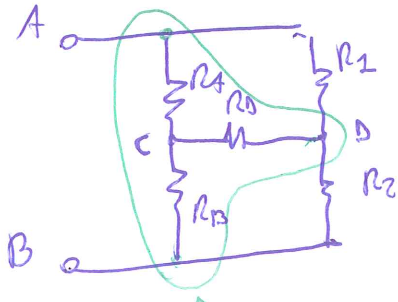
$$R_{D\lambda} = \frac{R_1 \cdot R_D}{R_B + R_D + R_1}$$

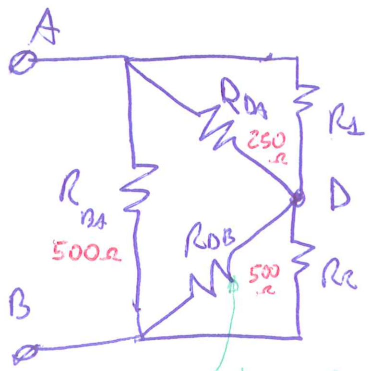
$\Rightarrow$



Quindi la R_{eq} della rete è data dal calcolo della serie $(R_{C\lambda} + R_A) // (R_{D\lambda} + R_2)$ il tutto sommato a $R_{A\lambda}$. (FARE I CALCOLI E SOSTITUIRE I VALORI)

Se invece procedo portando la stella iniziale a triangolo





Trasformo questa stella in questo triangolo

$$G_0 = \frac{1}{40}$$

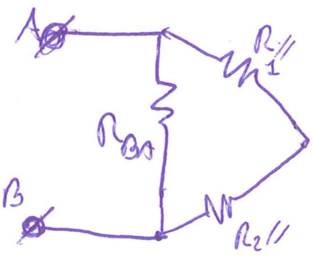
$$R_{BA} = R_A R_B G_0 = 100 \cdot 200 \cdot \frac{1}{40} = 500\,\Omega$$

$$R_{BD} = R_B \cdot R_D \cdot G_0 = 200 \cdot 100 \cdot \frac{1}{40} = 500\,\Omega$$

$$R_{AD} = R_A \cdot R_D \cdot G_0 = 100 \cdot 100 \cdot \frac{1}{40} = 250\,\Omega$$

Poi si sciolgono i paralleli e con pochi passaggi si arriva alla R_{eq} della rete

$$R_{1//} = (R_{AD} // R_1 =) \frac{250 \cdot 100}{350} = 71,43\,\Omega$$



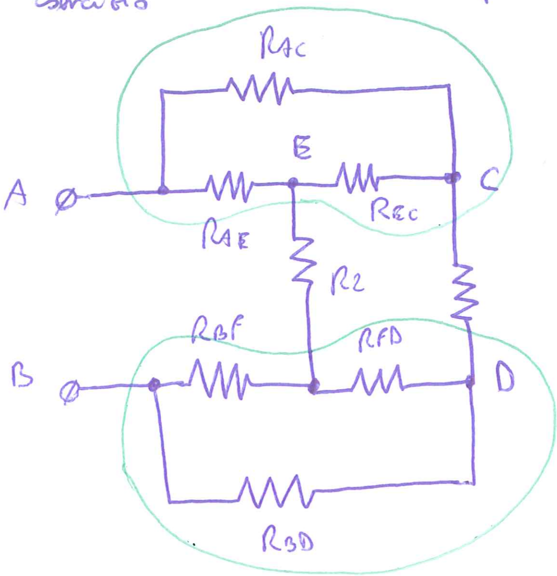
$$R_{2//} = (R_{DB} // R_2) = \frac{500 \cdot 200}{700} = 142,85\,\Omega$$

$$R_S = R_{1//} + R_{2//} = 214,287\,\Omega$$

$$R_{eq} = (R_{BA} // R_S) = \frac{500 \cdot 214,287}{(500 + 214,287)} = 150\,\Omega$$

TONDI TONDI GUALIVI GUALIVI

Esercizio   Calcolare la Req della rete contenente due triangoli.

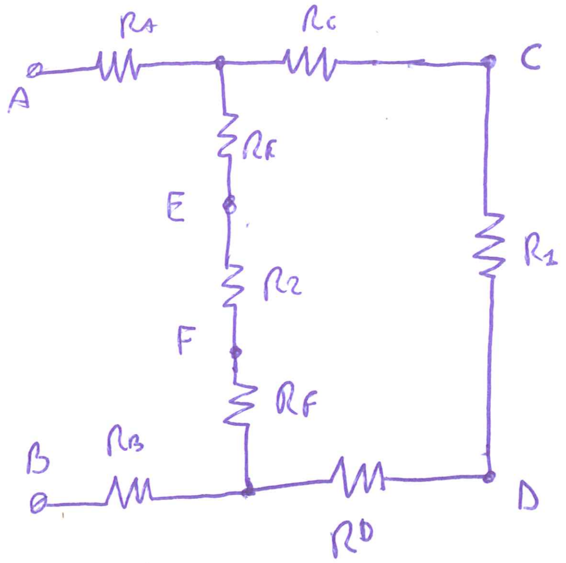


$R_{AC} = R_{BD} = 50$ $R_{AE} = R_{BF} = 50$

$R_{CE} = R_{FD} = 25$ $R_1 = 10$

$R_2 = 10$

La rete diventa la seguente



$R_0 = 50 + 25 + 50 = 125$

$$R_C = \frac{R_{AC} \cdot R_{CE}}{R_0} = \frac{50 \cdot 25}{125} = 10$$

$$R_E = \frac{R_{CE} \; R_{AE}}{R_0} = 10$$

$$R_A = \frac{R_{AC} \cdot R_{AE}}{R_0} = 20$$

$R_C = R_D$

$R_E = R_F$

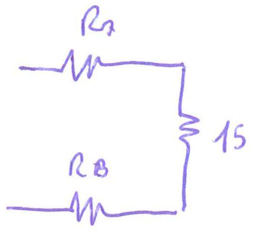
$R_A = R_B$

Con la rete semplificata risolviamo le serie e gli eventuali paralleli.

$R_{eq1} = R_C + R_1 + R_D = 10 + 10 + 10 = 30\,\Omega$

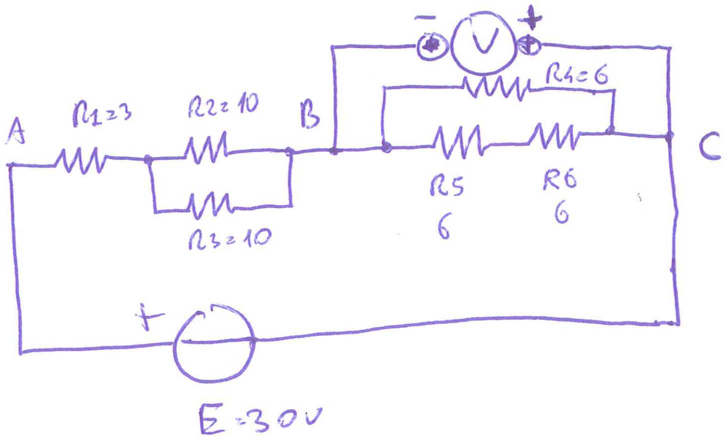
$R_{eq2} = R_E + R_2 + R_F = 10 + 10 + 10 = 30\,\Omega$

Il parallelo $R_{eq1} // R_{eq2} = 15\,\Omega$

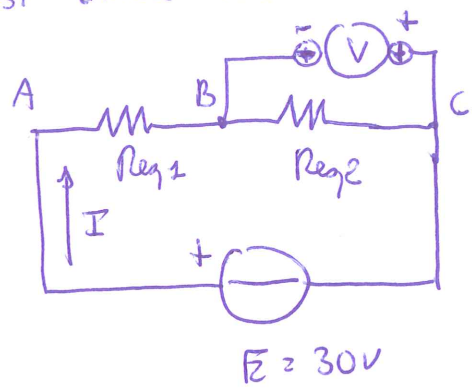


$R_{eq\,TOT} = R_A + R_B + R_{eq} = 20 + 15 + 20 = 55\,\Omega$

Esercizio semplice con serie e parallelo di resistenze.



Si ottiene facilmente:



$R_{eq1} = (R_2 // R_3) + R_1 = 8\ \Omega$

$R_{eq2} = (R_5 + R_6) // R_4 = 4\ \Omega$

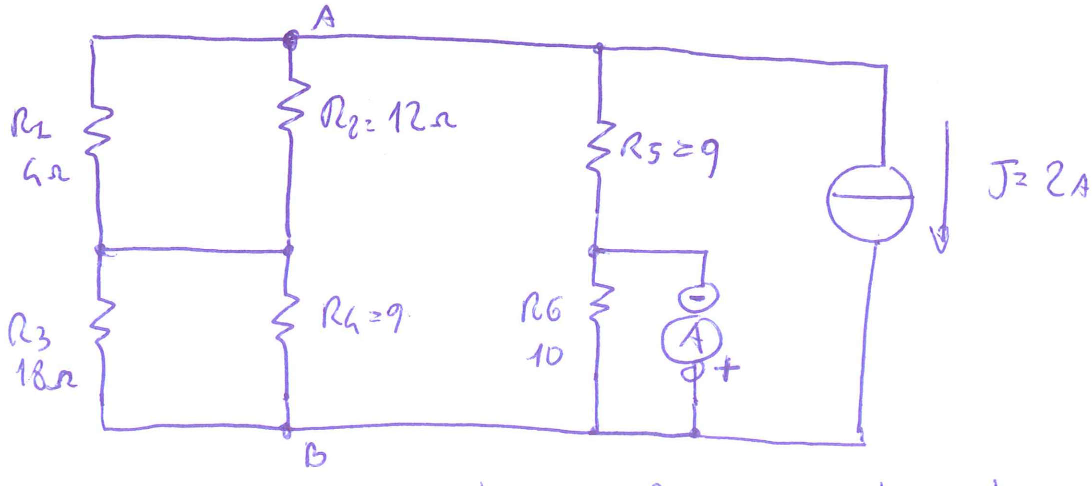
diventa un partitore di tensione

$$\boxed{V_{eq2} = \frac{R_{eq2}}{R_{eq2} + R_{eq1}} \cdot E = 10\ V}$$

ma il voltmetro ha i riferimenti invertiti, quindi indica $\boxed{-10\ V}$

$$\boxed{V_{voltmetro} = -V_{eq2} = -10}$$

Esercizio da svolgere da soli.

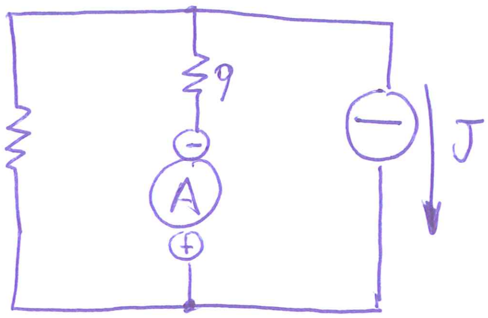


attenzione, l'amperometro equivale a un corto circuito.

TROVARE $R_{AB_{eq}}$

149

$R_{eq\,AB} = R_1 // R_2 + R_3 // R_4$

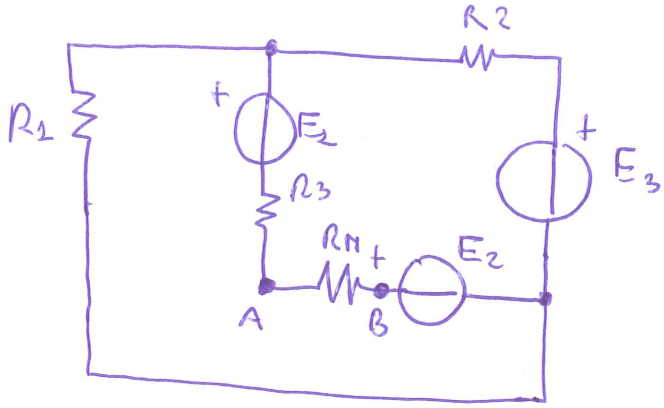


Si ripartisca la J con il partitore di corrente.
Le R sono uguali quindi si ha $\frac{J}{2}$ sull'amperometro
per i versi si ha concorde segno
L'amperometro ha segno +1 A

Fine lezione ing Valentina Siena.

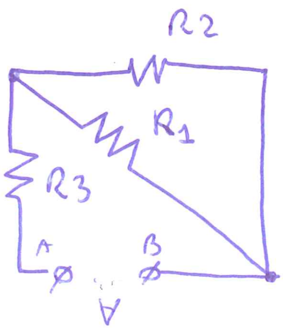
ESERCIZIO
Ing. GOTTARDO MARCO

Applicare il teorema di Norton per trovare la potenza dissipata dal resistore R_N connesso alla porta A-B



$R_1 = R_2 = R_3 = 10\,\Omega$ $R_N = 10\,\Omega$
$E_1 = 10\,V$
$E_2 = 20\,V$
$E_3 = 5\,V$

troviamo la conduttanza della rete resa passiva dopo avere staccato il carico R_N alla porta A-B. La rete con i generatori spenti diventa:

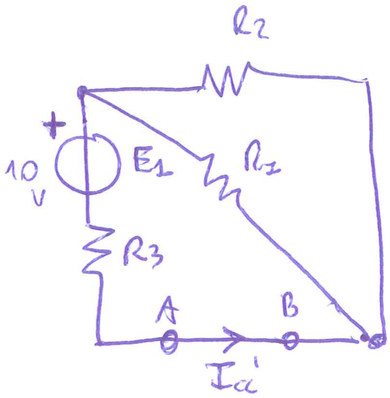


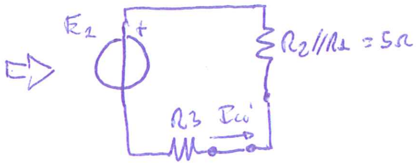
$G_{eq} = \frac{1}{R_{eq}}$ $R_{eq} = (R_2 // R_1) + R_3 = 5 + 10 = 15\,[\Omega]$

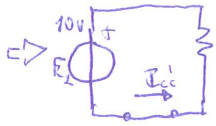
$G = \frac{1}{15} = 0{,}0666\,[S]$

Ora si pone in c.c. la porta A-B e si fanno agire i generatori di tensione uno alla volta $I_{cc_N} = I_{cc}' + I_{cc}'' + I_{cc}''$

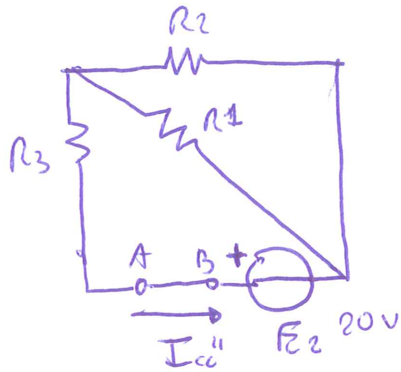
$$I_{cc} = I_{cc}' + I_{cc}'' + I_{cc}'''$$

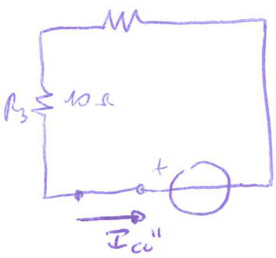






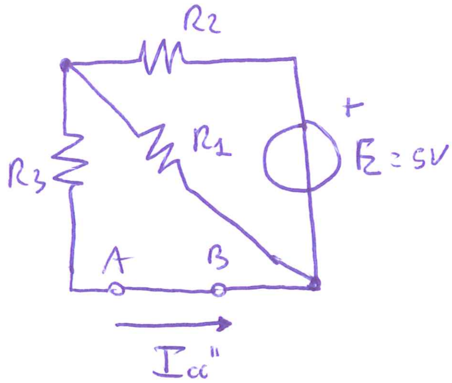
$$+I_{cc}' = \frac{10}{15} = -0,666 [A]$$

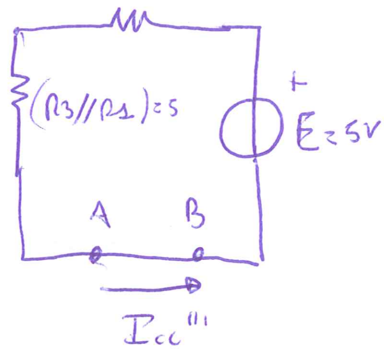




$V = RI$

$$I_{cc}'' = \frac{20}{15} = -1,33 [A]$$

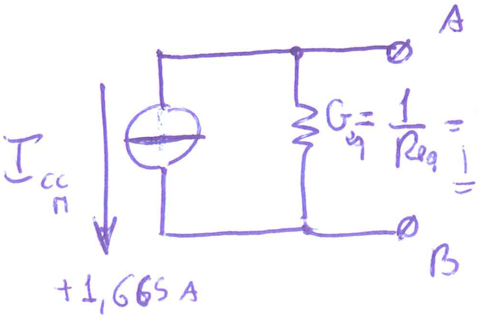




$$I_{cc}''' = \frac{5}{15} = 0,333 [A]$$

$$I_{cc_N}^{tot} = I_{cc}' + I_{cc}'' + I_{cc}''' = -0,666 - 1,333 + 0,333 = -1,665\,A$$

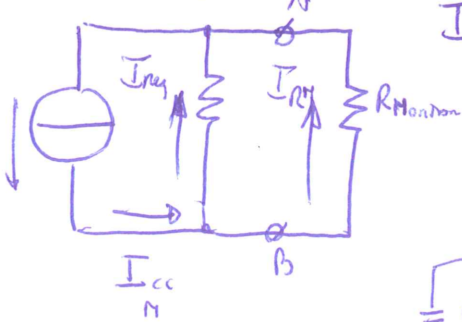
quindi la corrente I_{cc} di Norton sta andando dal morsetto B verso il morsetto A. Il generatore equivalente di Norton è in figura



$$G_{eq} = \frac{1}{R_{eq}} = 0,0666 [S]$$

= corrisponde a una R_{eq} di 15Ω

ora si ricollega il carico



$$I_{R_N} = I_{cc} \cdot \frac{R_{eq}}{R_{eq} + R_N} = \frac{1,665\,A \cdot 15}{15 + 10} = 0,999 (A)$$

quindi $P_{RN} = R_N I_{RN}^2 = 10 \cdot 0,999^2 = 9,98\,W$ dissipati

Lez 16   30/03/2012

Riprendiamo il concetto di doppio bipolo resistivo. deve avere delle condizioni particolari:

per la condizione di 1) PASSIVITÀ deve valere $R_{11} > 0$ $R_{11}R_{22} \geq \left(\frac{R_{12}+R_{21}}{2}\right)^2$

2) RECIPROCITÀ deve valere $R_{12} = R_{21}$

3) Non amplificazione.

La non amplificazione deve soddisfare singolarmente che

$$R_{11} \geq |R_{12}| \qquad e \qquad R_{21} \geq |R_{12}|$$

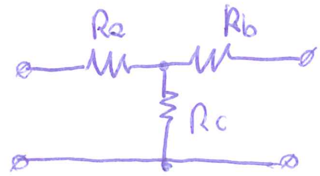
In queste condizioni il doppio bipolo può essere schematizzato con una rete di soli resistori.

È un caso particolare perché in generale un doppio bipolo non è mai sintetizzabile con una rete di bipoli. Va considerato come una scatola nera.

sintesi è l'opposto di analisi della rete

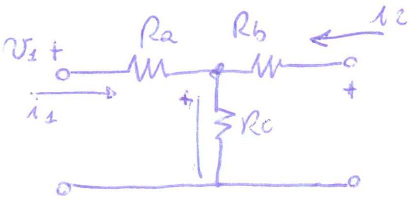
In questo caso molto particolare, con delle condizioni ben specifiche posso sintetizzare la rete con una rete di soli resistori passivi dato che ho 3 gradi di libertà userò solo 3 resistori.

1) sintesi a T (detta anche a stella



Si distinguono 2 casi $R_{12} > 0$ e $R_{12} < 0$

nel caso $R_{12} > 0$



La tensione V_1 è data dalla somma dei contributi su Ra e Rc

$v_1 = R_a i_1 + R_c (i_2 + i_2)$ si vede con Kirchhoff. $= (R_a + R_c) i_1 + R_c i_2$

$v_2 = R_b i_2 + R_c (i_c + i_i) = R_c i_1 + (R_b + R_c) i_2$

$$\begin{cases} v_1 = R_{11} i_1 + R_{12} i_2 \\ v_2 = R_{21} i_1 + R_{22} i_2 \end{cases}$$

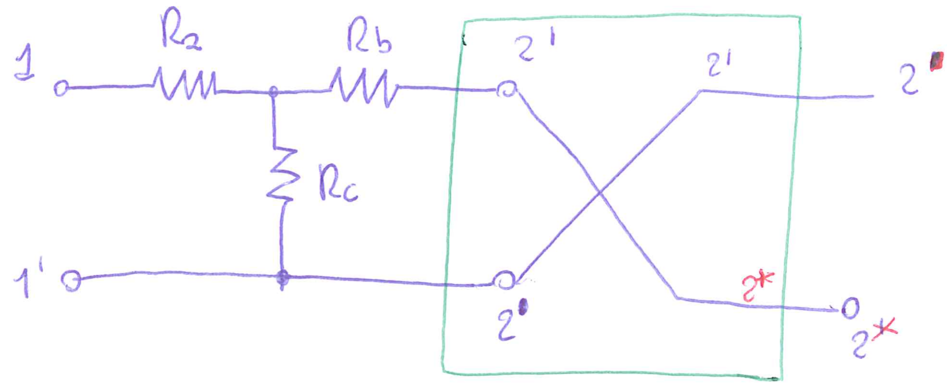
per confronto si ha.

$$\begin{cases} R_{11} = R_a + R_c \\ R_{12} = R_{21} = R_c \\ R_{22} = R_b + R_c \end{cases}$$

Fare la sintesi di questo caso particolare significa che noti i parametri esterni del doppio bipolo alle condizioni specificate, RICAVARE i TRE RESISTORI della sintesi a T

$$\begin{cases} R_a = R_{11} - R_{12} \\ R_b = R_{22} - R_{12} \\ R_c = R_{12} = R_{21} \end{cases}$$

Vediamo un trucco, incrociamo le uscite



questo trucco permetterà di fare i calcoli della sintesi senza incorrere nel problema di Resistenze finali negative.

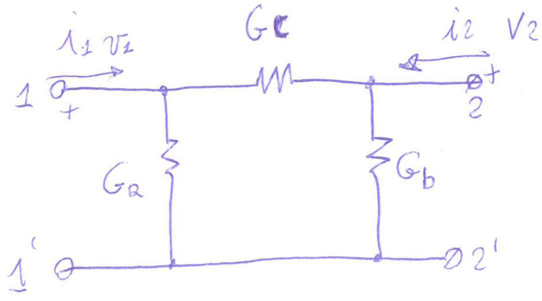
$$v_1 = R_a i_1 + R_c (i_1 - i_2) = (R_a + R_c) i_1 - R_c i_2$$

$$v_2 = R_c (i_2 - i_1) + R_b i_2 = -(R_c i_1) + (R_b + R_c) i_2$$

$$\begin{cases} R_a = R_{11} + R_{12} \\ R_b = R_{22} + R_{12} \\ R_c = -R_{12} = -R_{21} \end{cases}$$

con il vincolo iniziale di $R_{11} \geq |R_{12}|$ allora sono tutte positive.

La sintesi a Π è invece questa configurazione in cui si ragiona in termini di conduttanze e quindi si ricavano correnti a partire da tensioni



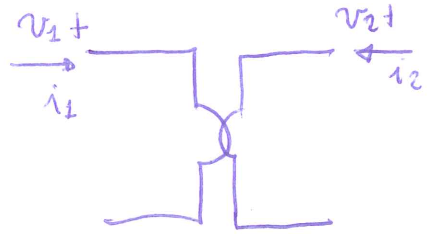
$G_{12} > 0$

$G_{12} < 0$

Il doppio bipolo trasformatore ideale (TRAFO IDEALE)

Attenzione: è solo una nomenclatura coincidente con il vero trasformatore quindi questo potrà funzionare anche in continua MA SOTTOLINEAMO CHE NON È IL TRASFORMATORE CLASSICO, ha solo lo stesso nome.

Questo potrebbe essere un alimentatore o un DC/DC converter.



$$\begin{cases} v_1 = n v_2 \\ i_2 = -\frac{1}{n} i_2 \end{cases}$$

Sarebbe ben rappresentato con le matrici ibride H e le matrici di Trasmissione T.

$$h = \begin{bmatrix} 0 & n \\ -n & 0 \end{bmatrix} \qquad g = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{n} \\ \frac{1}{n} & 0 \end{bmatrix}$$

$$T = \begin{bmatrix} n & 0 \\ 0 & \frac{1}{n} \end{bmatrix} \qquad T' = \begin{bmatrix} \frac{1}{n} & 0 \\ 0 & n \end{bmatrix}$$

Possiamo dire che Amplifica → attenzione non nel senso delle potenze, ma ad esempio delle sole tensioni o delle correnti infatti figura n

È reciproco

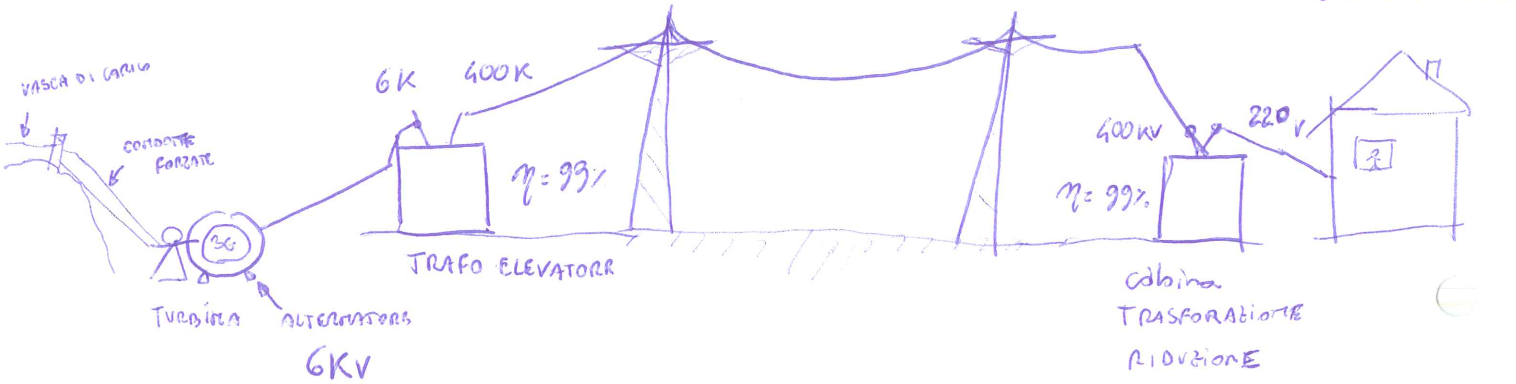
È trasparente alle potenze, infatti la totale potenza entrante è pari a zero.

$P(t) = v_1 \cdot i_1 + v_2 i_2$ poi si sostituisce come da sistema iniziale

$$\boxed{P(t) = n v_2 \cdot \left(-\frac{1}{n}\right) i_2 + v_2 i_2 = -v_2 i_2 + v_2 i_2 = 0}$$

Il flusso di potenza non ha dispersioni interne nel trasformatore ideale, ovvero quella che entra esce.

Esempio: A grandi linee

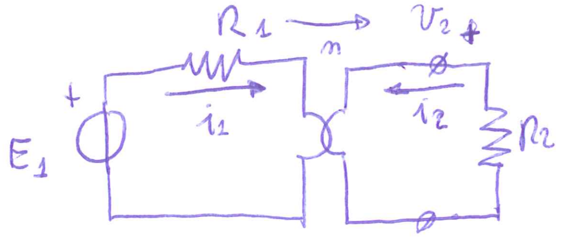


FLUSSO DI POTENZA IN LINEA SI DEVONO EVITARE PERDITE

CENTRALE $\Longrightarrow$ UTENZE

Si deve ricordare sulle linee il teorema dell'adattamento del carico per il massimo trasferimento di potenza.

Il trafo pùo essere utilizzato per adattare il carico



quanto deve valere la R_{1eq} vista dalla porta R_2

$$R_{1eq} = \frac{v_1}{i_1} = \frac{n v_2}{-\frac{1}{n} i_2} = -n^2 \frac{v_2}{i_2} = n^2 R_2$$

I coefficienti di trasmissione sono importanti nel corso di macchine elettriche

$$\boxed{R_{1eq} = n^2 R_2}$$

È la resistenza del secondario vista dal primario, il ragionamento vale anche se trasmetto dal primario al secondario ma si deve dividere

Questa procedura di trasmissione delle resistenze dal primario al secondario e dal secondario al primario è noto come PROBLEMA DELL'ADATTAMENTO DEL CARICO CON L'AUSILIO DEL TRASFORMATORE.

Vediamo gli ultimi doppi bipoli che consideriamo, escluso il giratore perché si usa poco, solo nelle microonde.

Vediamo i generatori pilotati (o comandati)

Sono quelli la cui la fem impressa o la i impressa ha dipendenza da altri parametri che potrebbero essere ancora tensioni o correnti in altri punti della rete.

Si identificano 4 combinazioni

1) NON SONO RECIPROCI 2) SONO BIPOLI ATTIVI

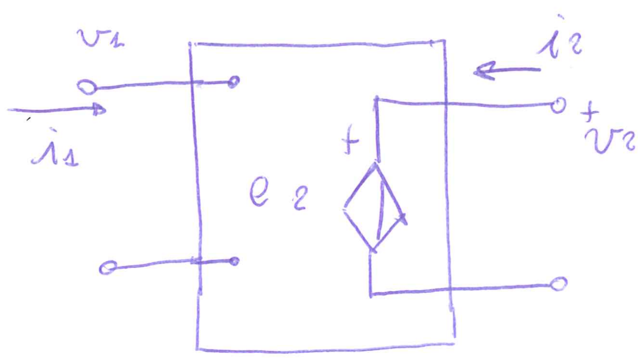
GTPT (generatore di tensione pilotato in tensione)

GCPT (" corrente " " " ")

GTPC (" " tensione " " in corrente)

GCPC (" " corrente " " in corrente)

Vediamo il GTPT, consideriamo la porta 1 a vuoto



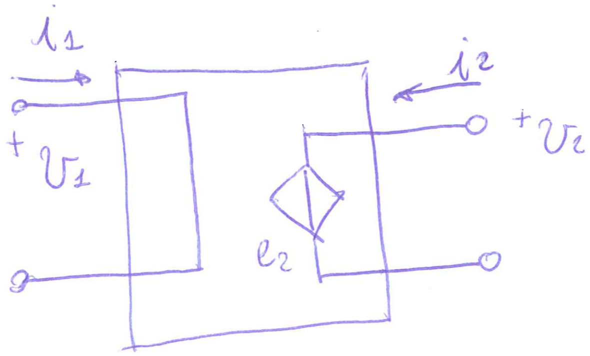
Le matrici più utili sono di transconduttanza e di Trasmissione

$$g = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ K_d & 0 \end{bmatrix}$$

$$T = \begin{bmatrix} \frac{1}{K_d} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} i_1 = 0 \\ v_2 = e_2 = K_d v_1 \end{cases}$$

vediamo il GTPC



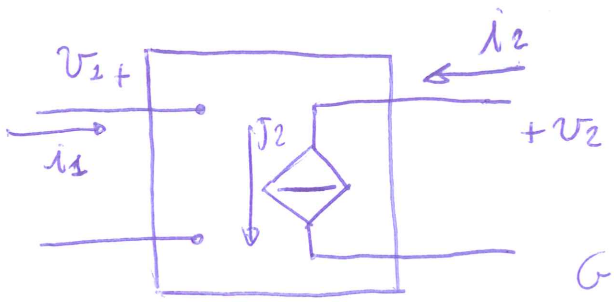
$v_1 = 0$

$v_2 = e_2 = K_R i_1$

$$R = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ K_R & 0 \end{bmatrix}$$

$$T = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \frac{1}{K_R} & 0 \end{bmatrix}$$

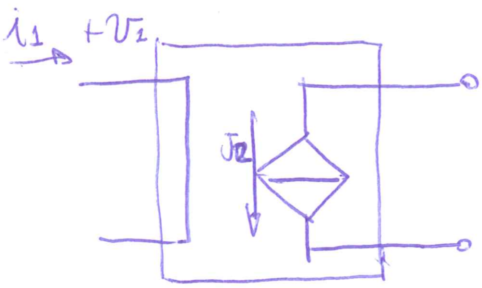
vediamo il GCPT



$$\begin{cases} i_1 = 0 \\ i_2 = J_2 = K_g v_1 \end{cases}$$

$$G = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ K_g & 0 \end{bmatrix} \qquad T = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{K_g} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

vediamo il GCPC



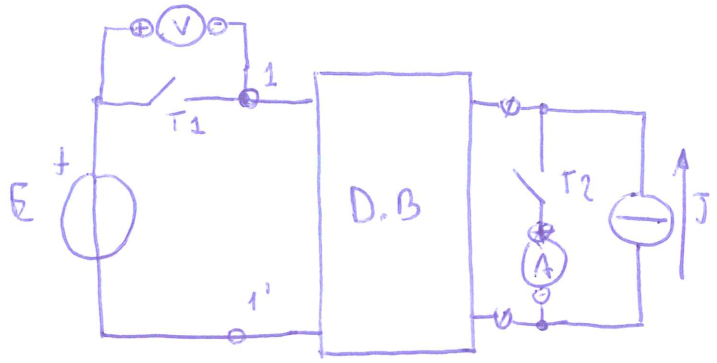
$$h = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ K_p & 0 \end{bmatrix}$$

$$T = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{K_p} \end{bmatrix}$$

si può considerare conclusa la parte di regime stazionario, nella prossima settimana si introducono i bipoli di ordine 1, CONDENSATORI E INDUTTORI ovvero i bipoli dinamici. Dopo le vacanze di pasqua si inizia il regime sinusoidale, quindi vanno rivisti i numeri complessi.
Nel primo compitino ci saranno anche i bipoli dinamici

02/03/2012 Lez n° 17 prof. Dughiero F.

Esercizio sui doppi bipoli.



se doppio bipolo è inerte simmetrico e passivo gli strumenti sono ideali sapendo che con T_1 e T_2 chiusi si misura $A: i_A' = 7A$ con T_1 e T_2 APERTI il voltmetro misura $V_V'' = 24V$

trovare i parametri della matrice di resistenza R del doppio bipolo.

$E = 60\,V \quad J = 3A$

$\boxed{I_A' = 7A}$ T_1, T_2 chiusi

$\boxed{V_V'' = 24V}$ T_1, T_2 APERTI

Se è simmetrico è anche reciproco.
È inerte (passa VA PER zero)
È passivo $|R_{12}| \le R_{11}$
non deve amplificare (per essere resistivo)

$\Rightarrow$ quindi è resistivo

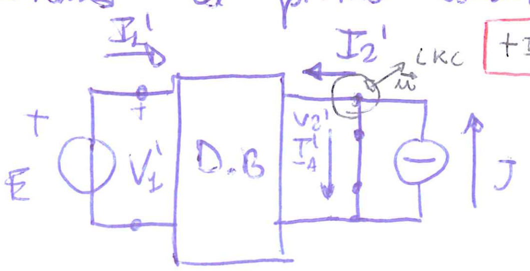
$R_{12} = R_{21}$

$R_{11} = R_{22}$

$$\begin{cases} V_1 = R_{11} I_1 + R_{12} I_2 \\ V_2 = R_{21} I_1 + R_{22} I_2 \end{cases}$$

cerchiamo questi perchè gli altri sono uguali per le condizioni fornite dal problema.

Proviamo la prima condizione con Tasti T_1 e T_2 chiusi



$\boxed{+I_2' + I_A' - J = 0}$

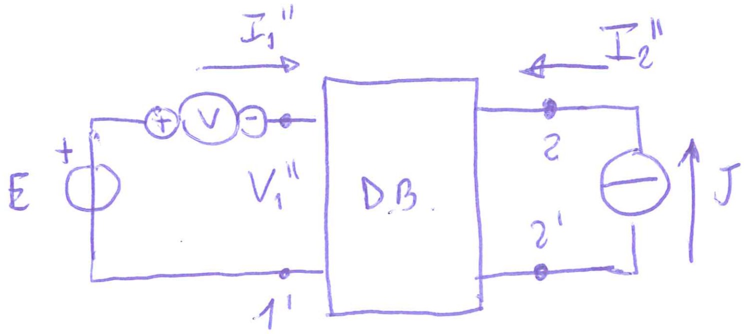
$I_2' = J - I_A'$

$$\begin{cases} V_1' = E = R_{11} I_1' + R_{12} I_2' = 0 \\ V_2' = 0 = R_{21} I_1' + R_{22} I_2' \end{cases}$$

$E = R_{11} I_1' + R_{12} (J - I_A')$

$0 = R_{21} I_1' + R_{22} (J - I_A')$

vediamo la condizione con T_1 e T_2 APERTI.



$$\begin{cases} V_1'' = E - V_v'' = R_{11}I_1'' + R_{12} + I_2'' \\ V_2'' = \qquad = R_{21}I_1'' + R_{22}I_2'' \end{cases}$$

EQU. AGGIUNTIVE
$$\begin{cases} I_1'' = 0 \\ I_2'' = J \end{cases}$$

informazioni aggiuntive:

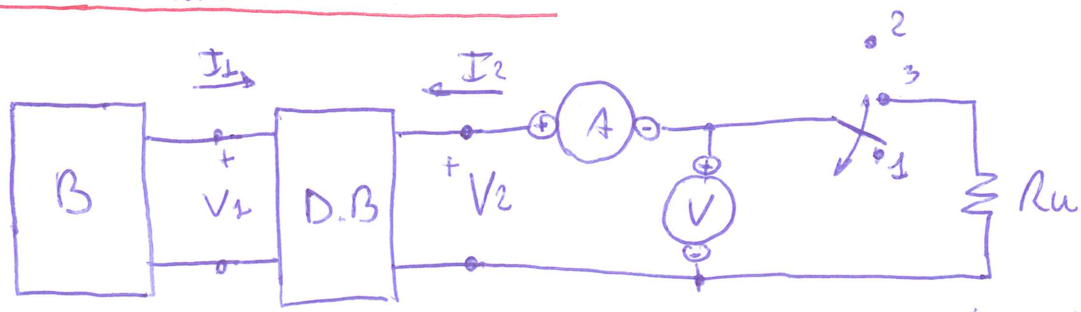
$I_1'' = 0$ perché la Ω interna del voltmetro è infinita

$I_2'' = J$ perché impressa dal generatore.

$R_{11} = R_{22} = 18\Omega$ $\qquad R_{12} = R_{21} = 12\Omega$ $\Big\}$ Risolvendo il sistema e semplicemente Applicando le definizioni

$R_{11} \geq R_{12}$

ESERCIZIO LASCIATO AGLI ALLIEVI



$R_{11} = 20\Omega$ $\qquad R_{12} = 10\Omega$ $\qquad R_{22} = 50\Omega$

$R_u = 16\Omega$ $\qquad I_A' = 2A$ $\qquad V_V'' = 96V$

sono inoltre noti i valori, alle condizioni

$I_A' = 2A$ $\qquad V_v'' = 96V$

$T_{in} \Rightarrow 1$ $\qquad T_{in} = 2$

Sono noti i parametri dati del D.B. resistivo, reciproco ecc. ed è inoltre noto il valore di Ri

Determinare i parametri equivalenti del bipolo di thevenin

E_{eq} e R_{eq}

Noti i parametri di thevenin trovare la potenza dissipata su Ru.

Bipolo capacitivo

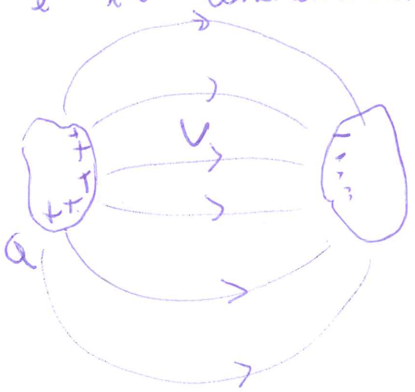
$$\boxed{C = \frac{Q}{V}}$$

definiamo la capacità come rapporto tra la carica immagazzinata sulla differenza del potenziale.

La separazione di carica produce anche una differenza di potenziale il cui rapporto dipende fortemente dalla GEOMETRIA del tubo di flusso (del vettore spostamento elettrico).

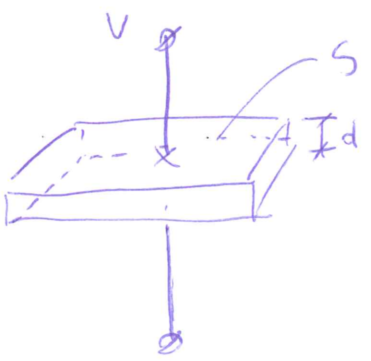
In elettrotecnica si usano μF e nF mentre in elettronica si usano anche i pF ovvero 10^{-12} Farad.

Più usato è il condensatore piano



il vettore spostamento elettrico è analogo (per il momento) al vettore campo elettrico. È un approccio diverso a quanto visto finora perché si operava sul vettore ~~campo~~ spostamento elettrico, o vettore J

Il condensatore piano è schematizzato così



$$C = \frac{Q}{V} \Rightarrow [F]$$

$$C = \varepsilon_0 \varepsilon_r \frac{S}{d}$$

ε_r = permettività dielettrica relativa

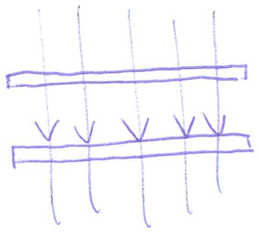
$$\varepsilon_0 = 8{,}85 \cdot 10^{-12} \frac{F}{m}$$

permettività dielettrica del vuoto

Vediamo un esempio fatto con un dielettrico di TITANIATO DI STRONZIO con $\varepsilon_r = 2000$

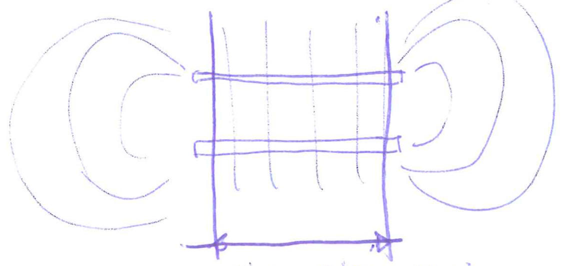
$A = 5 \cdot 10^{-5}\ m^2$ $\quad d = 2\,mm$ $\quad C = 8.85 \cdot 10^{-12} \cdot 2000 \cdot \dfrac{5 \cdot 10^{-5}}{2 \cdot 10^{-3}} = 440\ pF$

alcuni condensatori sembrano cilindrici ma in realtà sono lamine arrotolate e quindi, trascurando i raggi di curvatura sono considerabili piani $\quad r >> d \quad$ r = raggio di curvatura $\quad$ d = distanza tra le armature $\quad d << \sqrt{S}$



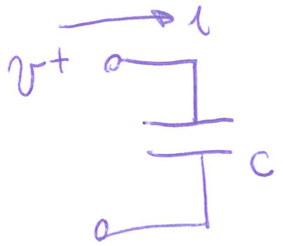
al centro il campo è uniforme

ovvero $d \ll \sqrt{S}$



si considera una porzione infinitamente estesa quindi svaniscono gli effetti del bordo.

Il bipolo condensatore ideale che consideriamo avrà queste rappresentazioni e questa caratteristica esterna



$$q = c v$$

$$i = c \frac{dv}{dt}$$

memoria espressa in tensione

$$v = \underbrace{v(0)}_{\text{variabile di "stato" del condensatore perché mi caratterizza lo stato del condensatore}} + \frac{1}{c}\int_0^{\tau} i(t)\,dt$$

da $\frac{dq}{dt} = c\frac{dv}{dt}$ ma $\frac{dq}{dt}$ è la definizione di corrente quindi si ottiene proprio...

$$i = c\frac{dv}{dt}$$

semplicemente sostituendo

Si chiama bipolo con memoria dato che compare il termine $v(0)$ nella formula di v che è di tipo integrale.

V_0 sarà lo stato "storico" o memoria della capacità.

Infatti rappresenta la tensione dovuta a cariche precedenti.

Il dielettrico non è perfetto ma ha una certa conducibilità elettrica, concetto in cui si basa il funzionamento del forno a microonde "riscaldamento per perdite dielettriche"

Si scalda l'umidità "acqua" che è un dielettrico buono, all'interno del cibo.

Solo il condensatore IDEALE degli esercizi rimane carico all'infinito, quelli veri si scaricano lentamente anche solo attraverso il dielettrico.

$$\boxed{W = \frac{1}{2} C V^2 \quad [J]}$$

è lo stato energetico del bipolo capacitore o condensatore.

In regime stazionario si comporta come un circuito aperto dato che la tensione alle armature è costante e la corrente nulla ma avrà uno stato energetico $\frac{1}{2} C V^2$ = energia elettrostatica accumulata.

Quando una molecola è polare (come H_2O) secondo il modello di Deby sollecitata con un campo oscilla per seguire il campo.

Il campo viene seguito con un certo Delay (resta in ritardo) perché c'è un effetto di attrito viscoso, durante il ritardo viene dissipata energia. Il forno a microonde oscilla a 2,41 GHz e la molecola dissipa energia ad ogni ciclo.

Il fenomeno del RUN OUT è tipico della funzione defrost, perché si scalda il cibo prima in quei punti in cui la transizione di stato ghiaccio - liquido avviene prima.

Il defrost è solitamente non omogeneo a causa di questo fenomeno.

L'invenzione del forno a microonde risale agli anni 40 per ragioni militari, veniva infatti costruito e inventato il RADAR alla frequenza dei 4 GHz.

Le tecnologie attuali sono basate su invenzioni degli anni 60 infatti il forno a microonde ha un rendimento del 35%.

Si sta studiando la nuova generazione di microwave oven

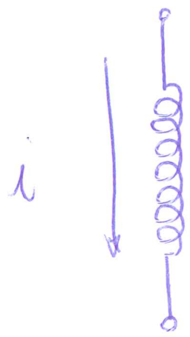
Bisogna trovare un sistema che renda uniforme senza farlo meccanicamente (eliminare il piatto rotante).

Si studiano sistemi per abbattere il carico batterico con i forni a microonde con i forni di nuova generazione, va abbattuto con 70° costante su tutto il cibo.

Vediamo il <u>bipolo induttore</u> (duale della capacità)

una induttanza ha il seguente schema elettrico

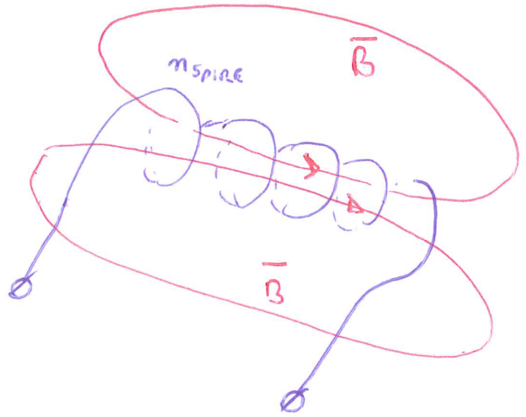
in stazionario si comporta come un corto circuito



Flusso di induzione magnetica diviso la corrente che lo produce

o meglio

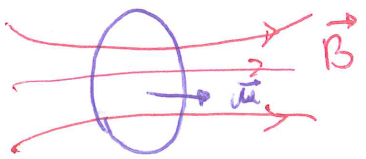
Il flusso auto concatenato diviso la corrente che lo produce



Il flusso dell'induzione magnetica B è dato dall'integrale sottostante

$$\boxed{\phi = \int_S \vec{B} \cdot \vec{n} \, ds}$$

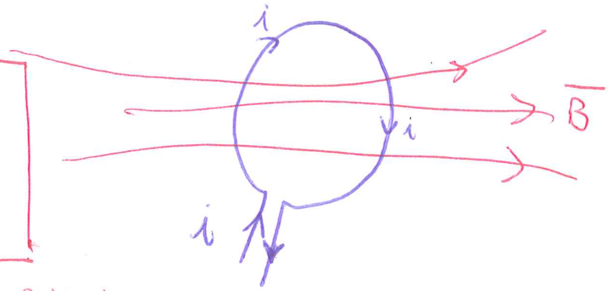
Su una singola spira c'è il flusso concatenato



se il flusso è concatenato con la stessa spira che lo ha prodotto allora si parla di FLUSSO AUTOCONCATENATO

Flusso di autoinduzione

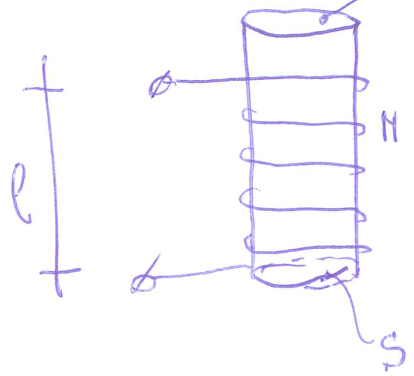
$$\boxed{L = \frac{\varphi}{i} \quad [H]}$$



tipicamente la grandezza elettrotecnica si esprime in milli Henry

I materiali presentano una certa PERMEABILITÀ μ

μ = permeabilità del mezzo



$$\boxed{L = \frac{\mu_0}{\mu_r}\,\frac{N^2 S}{\ell}}$$

μ_0 = permeabilità del vuoto

$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}\ \frac{H}{m}$

N = numero di spire

μ_r = permeabilità relativa

$\mu_r = 1$ = permeabilità dell'aria

$\ell = 10\ mm$

$A = 10^{-4}\ m^2$

$L = 12{,}6\ \mu H$ applicando la formula data.

dispositivo	grandezza fisica
Condensatore →	capacità [F]
induttore →	induttanza autoinduttanza coefficiente di autoinduzione [H]

caratteristica tensione corrente del bipolo induttore (sempre convenzionato come utilizzatore)

memoria espressa in corrente

$$\boxed{v = L\frac{di}{dt}} \qquad \boxed{i(t) = i(0) + \frac{1}{L}\int_0^T v(t)\,dt}$$

spesso i materiali magnetici non hanno caratteristiche lineari di permeabilità

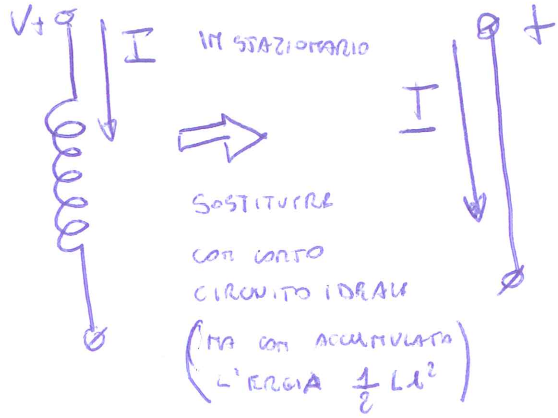
$$\boxed{W = \frac{1}{2} L i^2}\ [J]$$

$$\boxed{\frac{d\varphi}{dt} = L\frac{di}{dt}}$$

la legge di Faraday Neumann dice che c'è una relazione tra fem correnti e forze elettriche

Nella capacità la memoria o variabile di stato è la tensione, ma nella induttanza la variabile di stato è la corrente.

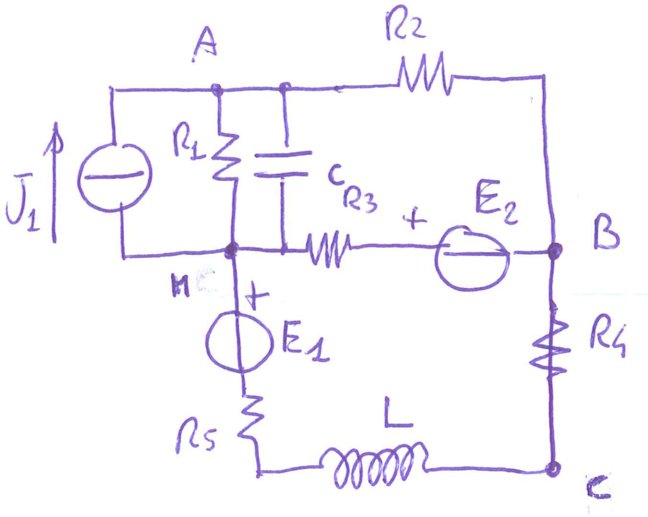
Verificare su google SMES "energy stores"



$$W = \frac{1}{2} L i^2$$

Fino a qui è tutto in programma per la prima prova di accertamento.

<u>ESERCIZIO ing. GOTTARDO MARCO</u> Usando il metodo dei potenziali di nodi calcolare V_A, V_B, V_C e le energie immagazzinate in C e in L. Valutare anche le potenze erogate dai generatori.



$E_1 = 30\,V$

$E_2 = 10\,V$

$J_1 = 2\,A$

$R_1 = 40\,\Omega$

$R_2 = 10\,\Omega$

$R_3 = 10\,\Omega$

$R_4 = 5\,\Omega$

$R_5 = 5\,\Omega$

$C = 10\,\mu F$ inizialmente scarico

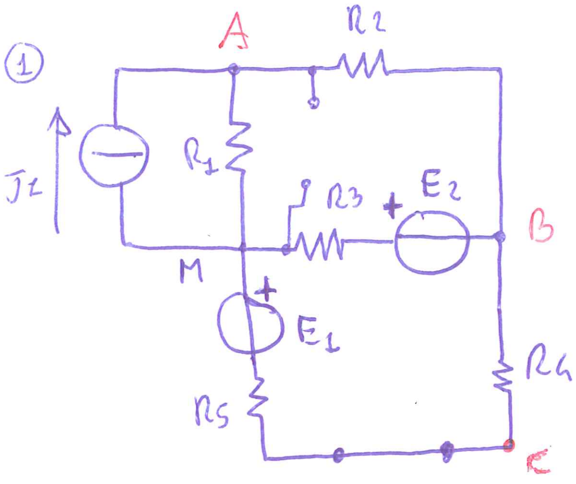
$L = 200\,mH$ inizialmente scarico

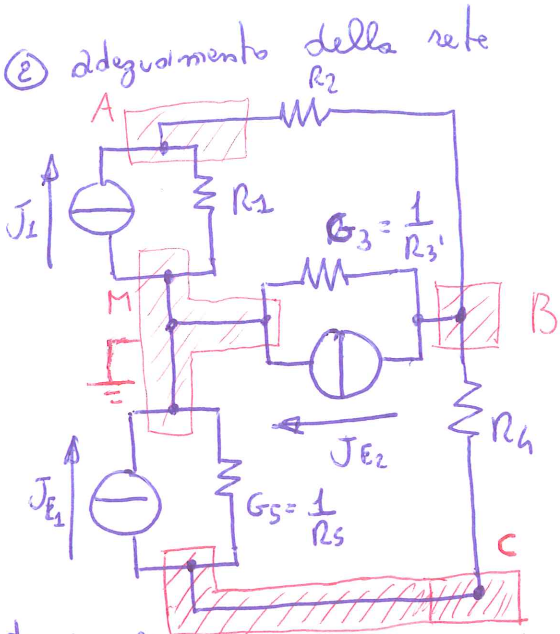
<u>Soluzione</u> dato che la rete è dichiarata in regime stazionario possiamo aprire il lato del condensatore e cortocircuitare l'induttanza. Questi ricompariranno nella rete una volta valutata la tensione $V_A - V_M$ per il condensatore e la corrente su R5 per l'induttanza.
Con questi parametri faremo quindi l'analisi energetica dei bipoli C e L usando le formule

$$\boxed{W_C = \frac{1}{2} C V^2} \qquad \boxed{W_L = \frac{1}{2} L i^2}$$

1) disegno la rete senza i bipoli C e L

2) Adeguo la rete per applicare il metodo dei potenziali nodali





con i seguenti valori per i generatori affini di corrente

$$J_{E_1} = \frac{E_1}{R_5} = 6[A] \quad G_5 = \frac{1}{R_5} = 0{,}2[S] \qquad J_{E2} = \frac{E_2}{R_3} = 1A \quad G_3 = \frac{1}{R3} = 0{,}1[S]$$

Posto, come in figura il potenziale del nodo M a 0, ovvero a massa scriviamo le equazioni risolventi:

$$\begin{cases} V_A\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right) - V_B\left(\frac{1}{R_2}\right) = +J_1 \\ V_B\left(\frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3'} + \frac{1}{R_4}\right) - V_A\left(\frac{1}{R_2}\right) - V_C\left(\frac{1}{R_4}\right) = -J_{E_2} \\ V_C\left(\frac{1}{R_4} + \frac{1}{R_5'}\right) - V_B\frac{1}{R_4} = -J_{E_1} \end{cases}$$

non ci sono generatori degeneri o casi particolari che impongano la scrittura di equazioni ausiliarie. Mettiamo in ordine le colonne delle variabili e il vettore dei termini noti, quindi scriviamo la matrice associata al sistema di cui verifichiamo la simmetria.

$$\begin{cases} V_A\left(\frac{1}{40}+\frac{1}{10}\right) - V_B\left(\frac{1}{10}\right) + 0 = J_1 \leftarrow 2\,[A] \\ -V_A\left(\frac{1}{10}\right) + V_B\left(\frac{1}{10}+\frac{1}{10}+\frac{1}{5}\right) - V_C\,\frac{1}{5} = -1 \\ 0 - V_B\left(\frac{1}{5}\right) + V_C\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{5}\right) = -6 \end{cases}$$

$$\begin{cases} V_A\, 0{,}125 - V_B\, 0{,}1 + 0 = 2 \\ -V_A\, 0{,}1 + V_B\, 0{,}4 - V_C\, 0{,}2 = -1 \\ 0 - V_B\, 0{,}2 + V_C\, 0{,}4 = -6 \end{cases}$$

ORA PREDISPONGO LE COLONNE DELLA MATRICE ED ESTRAGGO I COEFFICIENTI

$$\begin{array}{ccc} V_A & V_B & V_C \end{array} \quad \text{“}J\text{”}$$

$$\begin{bmatrix} 0{,}125 & -0{,}1 & 0 \\ -0{,}1 & 0{,}4 & -0{,}2 \\ 0 & -0{,}2 & 0{,}4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ -6 \end{bmatrix}$$

dato che la matrice è simmetrica vi è una buonissima probabilità che il sistema trovato sia il modello matematico della rete data.

Per risolvere il sistema con il metodo di eliminazione di GAUSS dobbiamo triangolarizzare la matrice facendo applicazioni lineari tra le righe. dobbiamo ottenere qualcosa di simile a:

$$\begin{bmatrix} m\,V_a & n\,V_B & z\,V_c \\ 0 & x\,V_B & y\,V_c \\ 0 & 0 & z\,V_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \text{Noto } 1 \\ \text{Noto } 2 \\ \text{Noto } 3 \end{bmatrix}$$

sotto la diagonale solo zeri

vettore dei termini noti

Procediamo moltiplicando la prima riga per 0,1 e la seconda per 0,125 successivamente somma alla seconda riga la prima. Queste due applicazioni lineari hanno sempre l'effetto di portare a zero il coefficiente a_{21} della matrice adattando di conseguenza i coefficienti della seconda riga al fine di mantenere verificata l'equazione che rappresenta.

$$\begin{array}{r} \times(0,1) \\ \times(0,125) \\ \\ \end{array}\begin{bmatrix} 0,125 & -0,1 & 0 \\ -0,1 & 0,4 & -0,2 \\ 0 & -0,2 & 0,4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ -6 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 0,0125 & -0,01 & 0 \\ -0,0125 & 0,05 & -0,025 \\ 0 & -0,2 & 0,4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0,2 \\ -0,125 \\ -6 \end{bmatrix}$$ ok

Ricordiamoci di moltiplicare per il coefficiente scelto anche il termine noto poi sommo i termini della prima riga di rispettivi della seconda.

$$\begin{bmatrix} 0,0125 & -0,01 & 0 \\ 0 & 0,04 & -0,025 \\ 0 & -0,2 & 0,4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,2 \\ 0,075 \\ -6 \end{bmatrix}$$ ok

Come possiamo vedere abbiamo guadagnato uno zero sotto la diagonale.
L'ultimo elemento da ridurre a zero è a_{32} ovvero quello cerchiato

Per ridurre a zero l'elemento cerchiato ora moltiplico la terza riga per 0,04 e la seconda per 0,04 e poi sommo le righe come fatto al passaggio precedente.

$$\begin{array}{r} \\ \times 0,2 \\ \times 0,04 \end{array}\begin{bmatrix} 0,0125 & -0,01 & 0 \\ 0 & 0,04 & -0,025 \\ 0 & -0,2 & 0,4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,2 \\ 0,075 \\ -6 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 0,0125 & -0,01 & 0 \\ 0 & 0,008 & -0,005 \\ 0 & -0,008 & 0,016 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,2 \\ 0,015 \\ -0,24 \end{bmatrix}$$ ok

Somma alla terza riga la seconda riga (termine a termine) quindi le prime due le ricopio uguali.

$$\begin{bmatrix} 0,0125 & -0,01 & 0 \\ 0 & 0,008 & -0,005 \\ 0 & 0 & 0,011 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,2 \\ 0,015 \\ -0,225 \end{bmatrix}$$ ok

da cui si ricava immediatamente il valore del potenziale V_c

$$V_c = \frac{-0,225}{0,011} = -20,45\,v$$

Poi si procede per sostituzione, alle lezioni di geometria si direbbe che si riduce la dimensione della matrice.

$$V_B\, 0,008 - V_c\, 0,005 = 0,015 \Rightarrow V_B = \frac{0,015-(20,45\cdot 0,005)}{0,008} = -10,91$$

$$V_A \, 0{,}0125 + V_B(-0{,}01) = 0{,}2$$

da cui, con semplici passaggi algebrici sull'equazione lineare di primo grado, otteniamo:

$$V_A = \frac{0{,}2 - (10{,}91 \cdot 0{,}01)}{0{,}0125} = +7{,}273 \, [V]$$

NOTA: con la calcolatrice SHARP EL-W506 provare i risultati facendo $\boxed{\text{MODE}} \rightarrow \boxed{6}$ (EQUATION) $\rightarrow \boxed{1}$ (3 variabili) $\rightarrow$ inserire in ordine i coefficienti della matrice

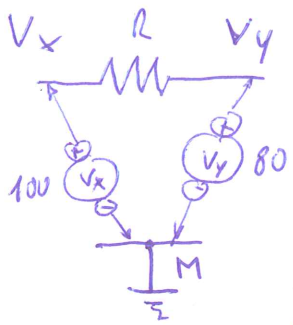
Riassumendo i risultati ottenuti si ha:

$$\boxed{V_A = 7{,}273 \, V} \quad \boxed{V_B = -10{,}91 \, V} \quad \boxed{V_C = -20{,}45 \, V}$$

Rispetto al nodo di massa prescelto. Nota bene che i risultati non avrebbero significato senza aver fissato un riferimento a zero volt.

<u>Cose utili da sapere</u>

Se cerco la corrente attraverso ad una resistenza appesa tra i due nodi (connessa tra due nodi) devo valutare la d.d.p a cui è soggetta e questa si ricava per differenza dei potenziali dei nodi a cui è collegata. Il riferimento corretto del segno si ha mettendo come primo termine (minuendo) quello che ha un potenziale più alto rispetto al nodo di riferimento e come sottraendo quello con potenziale più basso sempre rispetto al nodo di riferimento

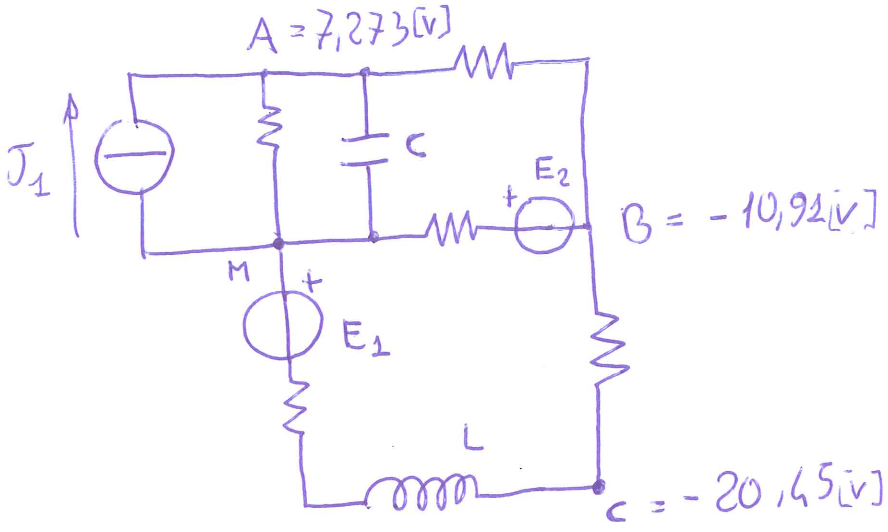


$V_x - V_y = 20 \, V$ è la caduta sulla R da cui posso dedurre I_R

$$I_R = \frac{V_x - V_y}{R}$$

e la potenza dissipata $P_R = R \cdot \left(\frac{V_x - V_y}{R}\right)^2 \, [W]$

Ridisegnamo lo schema iniziale inserendo i valori delle tensioni trovate. (Riferite al nodo M)

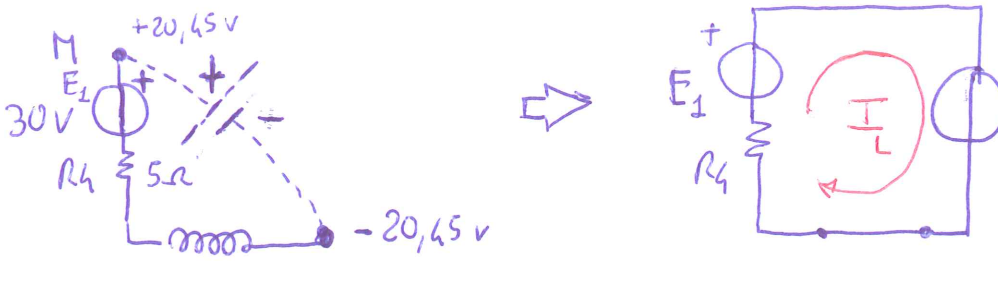


Si vede facilmente che la capacità C è posta in un punto equipotenziale al nodo A rispetto al nodo di massa M. Il calcolo dell'energia immagazzinata su questo bipolo è dunque

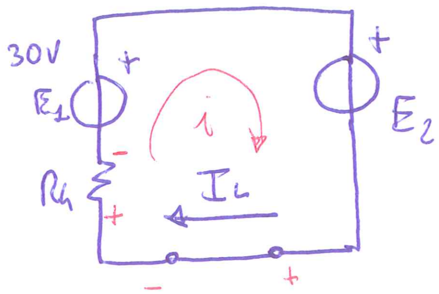
$$W_C = \frac{1}{2} C V^2 = 0{,}5 \cdot 10 \cdot 10^{-6} \cdot 7{,}273^2 = 0{,}000264\,[J]$$

$$W_C = 0{,}000264\,[J]$$

L'energia sull'induttanza è leggermente più complicata da calcolare perché abbiamo trovare la corrente nella maglia dove è inserita. Si può procedere creando una maglia fittizia semplificata dato che si conosce il potenziale del nodo C.



SI ORIENTA LA MAGLIA PER TROVARE I_L



$$iR_4 - E_1 + E_c = 0$$

$$i = \frac{E_1 - E_c}{R_4} = \frac{30 - 20{,}45}{R_4} \leftarrow 5\,\Omega$$

da cui ricaviamo $i = 1{,}91\,[A]$ che da luogo a una caduta di potenziale di 9,55 volt con il riferimento positivo dalla parte dell'induttanza, come ho posto i segni nello schema precedente.

L'energia immagazzinata nel bipolo induttore è quindi pari a:

Energia induttiva. $$W_L = \frac{1}{2} L i^2 = 0{,}5 \cdot 200 \cdot 10^{-3} \cdot 1{,}91^2$$

$$\boxed{W_L = 0{,}191\,[J]}$$

Fine esercizio: DIVAGAZIONE A CURA DELL'ING. GOTTARDO

Forse non tutti ricordano come è definita la caloria (unità di misura che sta per essere dismessa perché si tende ad esprimere tutto in Joule).

Una chilo caloria è la quantità di energia necessaria per aumentare di un grado (da 20 a 21°C) la temperatura di un Kg di acqua.

$$\boxed{1\,KJ = 2{,}388459 \cdot 10^{-1}\,Kcal}$$

Per un approfondimento visita il link:

www.gtronic.it/energiaingioco/concorso.html