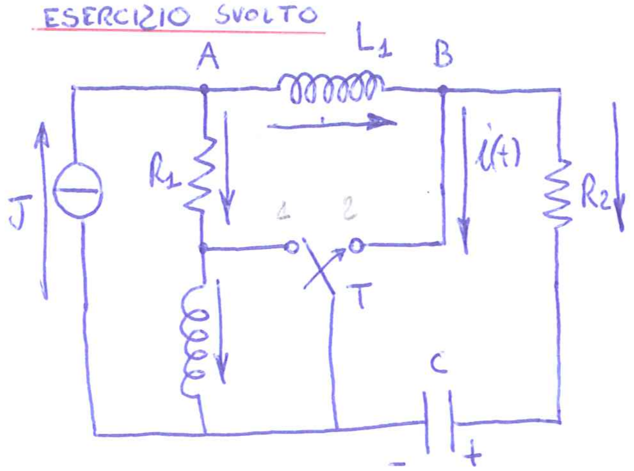
RETE IN REGIME VARIABILE

ESERCIZIO SVOLTO



$J = 6A \quad C = 500\mu F$

$R_1 = 12\Omega \quad R_2 = 24\Omega$

$L_1 = 20\,mH$

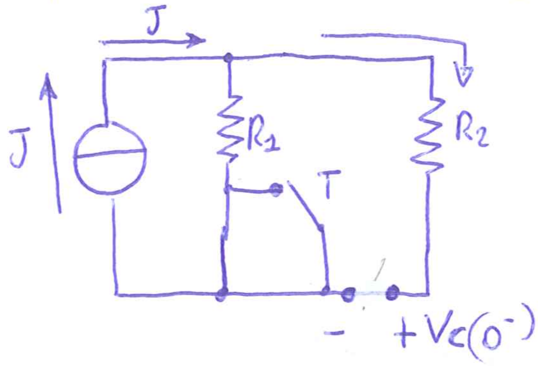
$L_2 = 40\,mH$

Il circuito è in regime stazionario per $t<0$ e con l'interruttore T in 1 e $i_{L_2}(0^-)=0$.

In $t=0$ si commuta T dalla posizione 1 a 2.
Dati tutti i parametri della rete trovare $i(t)$ per $t \geq 0$

si fanno 3 passi
1) Studio per $t<0$
2) studio per $t=0$
3) studio per $t>0$

In $t<0$ la rete è in regime stazionario quindi vale la rete sottostante:



$V_c(0^-) = V_{R_1} \overset{!}{=} JR_1 \overset{!}{=} 6 \cdot 12 = 72V$

$i_{L_2}(0^-)=0$ dato dal problema

$i_{L_1}(0)=0$ dato che si trova in serie a C

STUDIO PER $t=0$

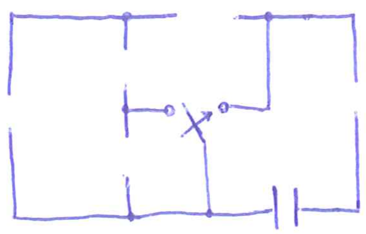
La rete cambia topologia a causa della commutazione di T.

1) Verificare se ci sono maglie capacitive (per la verifica dell'insorgere di correnti impulsive del tipo $X\delta_0(t)$).

2) Verificare se ci sono insiemi di taglio induttivi per la presenza di tensioni impulsive del tipo $\Delta\delta_0(t)$

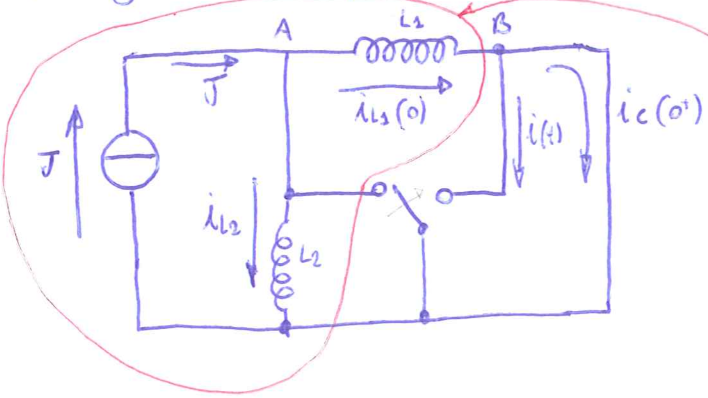
NON POSSONO ESSERCI TENSIONI IMPULSIVE, IN EFFETTI non si possono formare delle maglie capacitive visto che mancano i generatori di tensione.

Le reti ridotte per tensioni impulsive sono formate da C, E, e T che chiudono. tutti gli altri bipoli vanno aperti



NON CI SONO MAGLIE CAPACITIVE.

cerco gli insiemi di taglio induttivi, tengo solo L, J e interruttori che aprono, tutti gli altri bipoli vanno messi in corto.

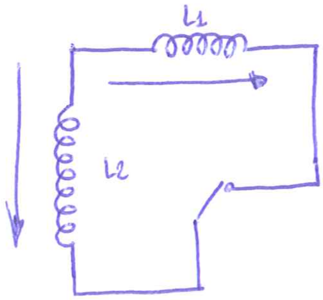


INSIEME DI TAGLIO INDUTTIVO

Quindi possono originarsi delle tensioni impulsive che si studiano con la composizione degli impulsi.
(Che vale sia per impulsi di tensione che di corrente).

Al nodo B vale LKC. $i_{L1}(0^+) = i_c(0^+) + i(t)$

LKC A $\quad J - i_{L2} = i_{L1}(0^+)$



$$V_{L1}(0^+) = V_{L2}(0^+)$$

$$\Lambda_{L1}\delta_0(0^+) = \Lambda_{L2}\delta_0(0^+)$$

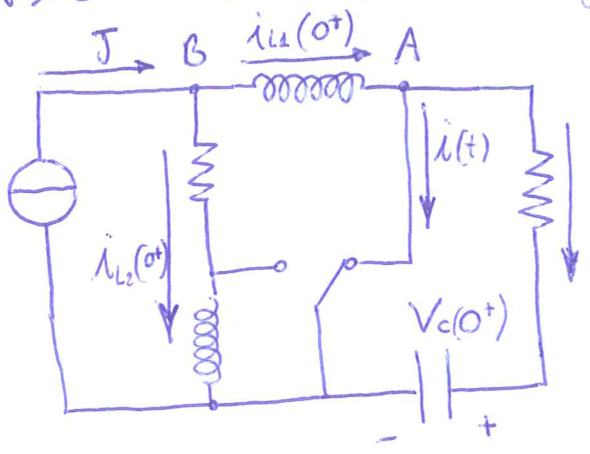
$$\Lambda_{L1} = L_1\left[i_{L1}(0^+) - i_{L1}(0^-)\right] \qquad \Lambda_{L2} = L_2\left[i_{L2}(0^+) - i_{L2}(0^-)\right]$$

$$L_1\left[i_{L1}(0^+) - i_{L1}(0^-)\right]\delta_0(0^+) - L_2\left[i_{L2}(0^+) - i_{L2}(0^-)\right]\delta_0(0^+) = 0$$

$$i_{L1}(0) = \frac{J}{L_1+L_2}\cdot L_2 = \frac{6}{40+20}\cdot 40 = \frac{240}{60} = 4\,A$$

$$i_{L2}(0) = \frac{J}{L_1+L_2} L_1 = \frac{6\cdot 20}{20+40} = \frac{120}{60} = 2A$$

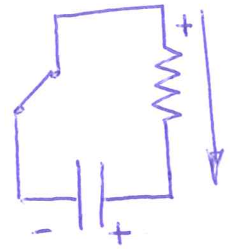
Per $t>0$ vale la rete con la seguente topologia.



$$i_c = c\frac{dV_c}{dt}$$

LKC "A" $\boxed{i(t) = i_{L1}(0^+) - i_c(0^+)}$

LKT (R_2, C)



$$V_{R(0)} + V_{c(0^+)} = 0$$

$$V_c(0^+) = -V_R(0) \qquad c\frac{dV_c}{dt}$$

$$V_c(0^+) = -i_c R_2$$

$$V_c(0^+) = -R_2 C \frac{dV_c}{dt}.$$

$$+R_2C\frac{dV_c}{dt} + V_c(0^+) = 0 \qquad \boxed{\frac{dV_c}{dt} + \frac{1}{R_2C}V_c(0^+) = 0}$$

QUESTA EQUAZIONE DIFFERENZIALE OMOGENEA SI RISOLVE COME SOMMA DELL'INTEGRALE PARTICOLARE E L'INTEGRALE DELL'OMOGENEA ASSOCIATA.

$$\boxed{V_c(t) = V_{cp} + V_{co}}$$

INTEGRALE PARTICOLARE — integrale dell'omogenea associata.

Essendo l'equazione differenziale omogenea l'integrale particolare sommato a quello dell'omogenea è pari ai valori iniziali: $\boxed{V_c(t) = R_1 J = 72}$

L'integrale particolare è pari al valore iniziale.

$$V_{co} = A e^{-\frac{t}{T_c}} \qquad T = R_2C = 24 \cdot 500\,\mu F = \frac{24\cdot 500}{1000000} = 0{,}012\ s = 12\ ms$$

$$\boxed{72 = 0 + A e^{-\frac{t(0^+)}{\tau}}}$$

che valutato in 0^+ vale $72 = A e^0$ $\quad 72 = A e^0 = A$

quindi $A = R_1 \cancel{I_2} = R_1 J = 72$

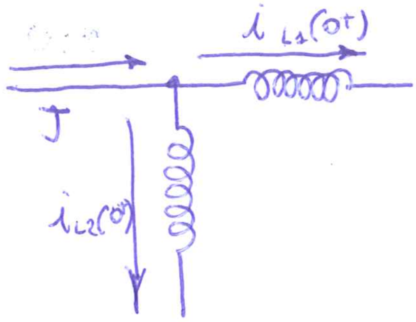
ma stiamo cercando $i(t)$ quindi riprendiamo le leggi di Kirchoff ai nodi A e B.

già trovato

$$\boxed{i(t) = i_{L1}(0^+) - C\frac{dV_c}{dt}}$$

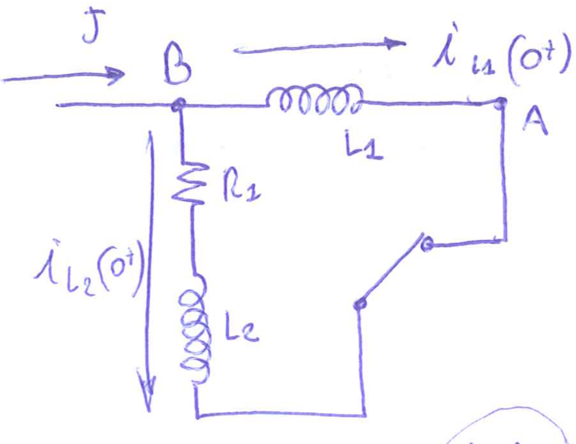
deve ancora essere trovato.

$i_{L1}(0^+)$ lo trovo con LKC al nodo B.



$$\boxed{i_{L1}(0^+) = J - i_{L2}(0^+)}$$

$$V_{L1} = L\frac{d\, i_{L1}(t)}{dt}$$



LKC in B $\quad \boxed{i_{L1}(0^+) = J - i_{L2}(0^+)}$

$$V_{L1} - V_{L2} - V_{R1} = 0$$

$$V_{L2} + V_{R1} = V_{L1}$$

$V_{L1} = L_1 \frac{d i_{L1}(0^+)}{dt}$

$i_{L2}(0^+) \cdot R_1$

$V_{L2} = L_2 \frac{d i_{L2}(0^+)}{dt}$

$$\boxed{L_2 \frac{d i_{L2}(0^+)}{dt} + R_1 i_{L2}(0^+) = L_1 \frac{d i_{L1}(0^+)}{dt}}$$

$$L_2 \frac{d i_{L2}(0^+)}{dt} - L_1 \frac{d\, i_{L1}(0^+)}{dt} + i_{L2}(0^+) R_1 = 0$$

$$L_2 \frac{d\left(J - i_{L1}(0^+)\right)}{dt} - L_1 \frac{d\, i_{L1}(0^+)}{dt} + R_1\left(J - i_{L1}(0^+)\right) = 0$$

$$L_2 \left[\frac{dJ}{dt} - \frac{d\, i_{L1}(0^+)}{dt}\right] - L_1\left[\frac{d i_{L1}}{dt}\right] + R_1\left(J - i_{L1}(0^+)\right) = 0$$

$$L_2\left[0 - \frac{d i_{L1}(0^+)}{dt}\right] - L_1 \frac{d i_{L1}}{dt} + R_1\left(J - i_{L1}(0^+)\right) = 0$$

$$- L_2 \frac{d\, i_{L1}(0^+)}{dt} - L_1 \frac{d i_{L1}}{dt} + R_1 J - i_{L1}(0^+) R_1 = 0$$

$$- \frac{d i_{L1}(0^+)}{dt} \left(L_2 + L_1\right) - i_{L1}(0^+) R_1 = -R_1 J$$

$$\frac{d i_{L1}(0^+)}{dt} \left(L_2 + L_1\right) + i_{L1}(0^+) R_1 = R_1 J$$ dividi tutto per (L_1+L_2)

$$\boxed{\frac{d i_{L1}(0^+)}{dt} + i_{L1}(0^+) \frac{R_1}{(L_1+L_2)} = \frac{R_1}{L_2+L_1} J}$$

$$\frac{d i_{L1}(0^+)}{dt} + i_{L1}(0^+) \frac{R_1}{(L_1+L_2)} = \frac{R_1 J}{L_2+L_1}$$

$$\frac{d i_{L1}}{dt} = 0$$

$$\boxed{Z + \frac{R_1}{L_2+L_1} = 0}$$

da cui $Z = -\dfrac{R_1}{L_2+L_1} = -\dfrac{1}{\tau}$

$$= \frac{-1}{\frac{(L_2+L_1)}{R_1}} = -\frac{1}{\frac{(20+40)\cdot 10^{-3}}{12}} = \frac{-1}{0{,}05 \text{ sec}}$$

da cui $T = 5\,ms$

questa equazione differenziale lineare ordinaria non omogenea si risolve sommando l'integrale particolare all'integrale dell'omogenea associata.

$$\boxed{i_{L1}(0^+) = \underbrace{i_{L1P}(0^+)}_{\text{INTEGRALE PARTICOLARE}} + \underbrace{i_{L2O}(0^+)}_{\text{INTEGRALE DELL'OMOGENEA ASSOCIATA}}}$$

$$i_{L2}(0) = A e^{-\frac{t}{\tau}}$$

ma per $t = 0^+$ si ha $\boxed{i_{L2O}(0^+) = A}$

$$\boxed{0 + i_{L1}(0^+)\frac{R_1}{(L_1+L_2)} = \frac{R_1 J}{L_1+L_2}}$$

dove si pone $\frac{d i_{L1}(0)}{dt} = 0$ perché questa è la maniera di risolvere queste eq. differenziali.

$$i_{L1}\cdot(R_1) = \frac{\overset{1}{\cancel{R_1}}}{\cancel{R_1}} J \frac{\overset{1}{\cancel{(L_1+L_2)}}}{\cancel{(L_1+L_2)}}$$

da cui

$$i_{L1}\cdot(R_1) = J$$

$i_{L1}(0^+)$ è noto e vale

$$\boxed{i_{L1}(0^+) = J\frac{L_2}{L_1+L_2}}$$

partitore fatto per $t=0$

$$J\frac{L_2}{L_1+L_2} = 6 + Ae^{-\frac{t}{\tau}}$$

$$J\frac{L_2}{L_1+L_2} = J + Ae^{-\frac{t}{\tau}}$$

$$J\frac{L_2}{L_1+L_2} - J = Ae^{-\frac{t}{\tau}}$$

$$J\left(\frac{L_2}{L_1+L_2} - 1\right) = A\cdot 1$$

$e^{-\frac{t}{\tau}}$ con $t=0^+$ quindi $e^{-0} = 1$

Da $J \frac{L_2}{L_1+L_2} = J + A$

Ricaviamo A che è la costante di integrazione.
Facciamo il minimo comune multiplo.

$$\boxed{J \frac{\cancel{L_2} - L_1 - \cancel{L_2}}{L_1 + L_2} = A}$$

$$J \left[-\frac{L_1}{L_2+L_1} \right] = A \qquad \boxed{A = -\frac{J L_1}{L_1+L_2}}$$

ora che conosciamo A scrivo l'espressione di $i(t)$ da KLC al nodo B

$$\boxed{i(t) = i(L_1) + i_c(t)}$$

$$i(t) = J\left(1 - \frac{L_1}{L_1+L_2} e^{-\frac{t}{\tau}}\right) + \left[-J \frac{R_1}{R_2} e^{-\frac{t}{\tau_c}}\right]$$

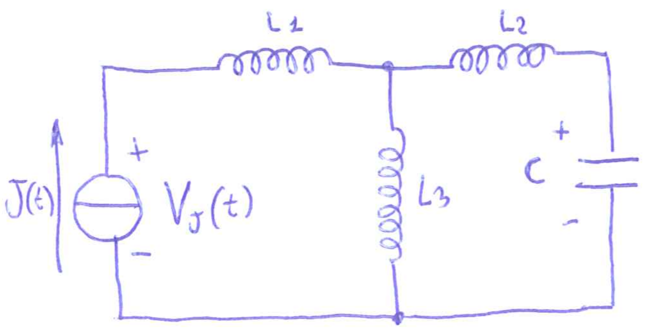
$$i(t) = J\left[1 - \frac{L_1}{L_2+L_1} e^{-\frac{t}{\tau_L}} - \frac{R_1}{R_2} e^{-\frac{t}{\tau_c}}\right]$$

$$= 6 - \frac{2\cancel{0}}{6\cancel{0}} \cdot 6\, e^{-\frac{t}{5ms}} - \cancel{6}^{1} \cdot \frac{12}{\cancel{24}_{4}} \cdot e^{-\frac{t}{12ms}}$$

$$= 6 - 2 \cdot e^{-\frac{t}{5ms}} - 3 e^{-\frac{t}{12ms}}$$

$$\boxed{i(t) = 6 - 2e^{-\frac{t}{\tau_L}} - 3e^{-\frac{t}{\tau_c}}}$$ SOLUZIONE FINALE

Secondo esercizio



$J(t) = J\delta_{-1}(t) = 100\,\delta_{-1}(t)$

$C = 25\mu F$

$L_1 = 5\,mH$

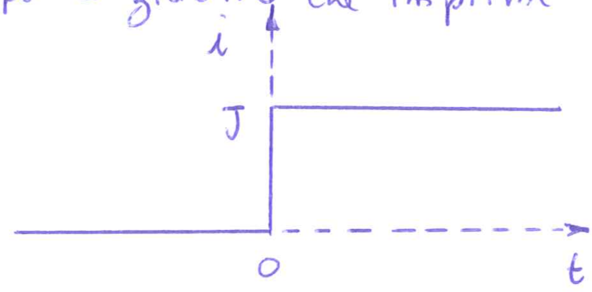
$L_2 = 20\,mH$

$L_3 = 20\,mH$

Il circuito è a riposo per $t<0$. Dati tutti i parametri della rete e l'ampiezza J del gradino di corrente impresso, trovare $V_J(t)$ per $t \geq 0$.

Soluzione ~~Questo~~ per $t<0$ generatore è di tipo a gradino che imprime la corrente del tipo:

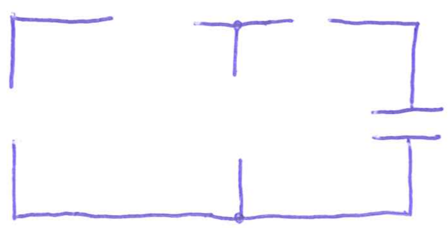
$$J(t) = J\delta_{-1}(0) = \begin{cases} 0 & t<0 \\ J & t \geq 0 \end{cases}$$



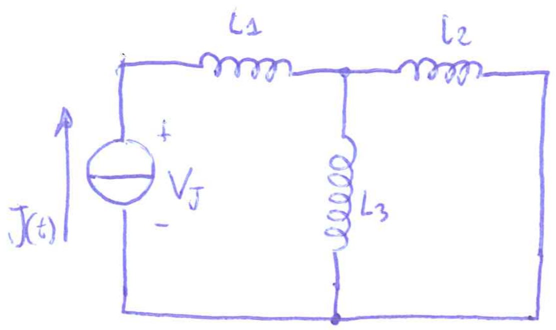
Dati iniziali: $i_{L1}(0^-) = i_{L2}(0^-) = i_{L3}(0^-) = 0\ [A]$

$V_c(0^-) = 0\,[V]$

studio per $t=0$ ricerca delle maglie capacitive per lo studio dell'insorgenza di correnti impulsive.



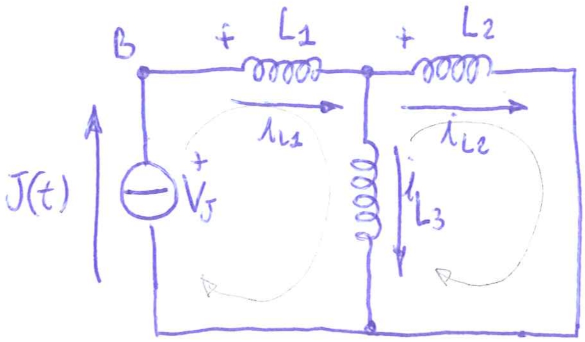
La rete ridotta per le correnti impulsive è formata solo da condensatori, generatori di tensione, e interruttori che chiudono.

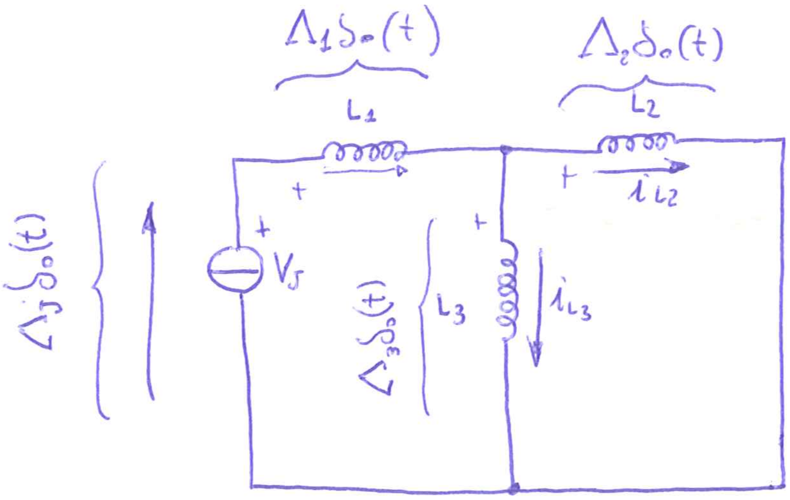


La rete ridotta per le tensioni impulsive è formata solo da induttanze, generatori di corrente e da interruttori che aprono.
Il generatore impulsivo di corrente funge da interruttore che apre.
tutti gli altri bipoli vanno in corto circuito.

Esistono insiemi di taglio formati da soli L, $J(t)$ e interruttori che ~~chiudono~~ aprendono 1° insieme L_1, L_2, L_3. 2° insieme $J(t), L_1$ 3° insieme $J(t), L_3, L_2$

con $J(0^+) = J \neq 0$ con $J(0^+) \neq J(0^-)$ Pertanto ci possono essere tensioni impulsive.





Equazione di compensazione delle tensioni impulsive

LKT alla maglia J, L_1, L_3 $\Lambda_J \delta_0(t) = \Lambda_1 \delta_0(t) + \Lambda_3 \delta_0(t)$